التحفة البهية في الأصول المنتسبة



الجـــزء الثانى

من كتاب التحفة البهيـــة فى الاصول الهندســية

(مقرر الســنة الثانيـة التجهيزية)

تأليف

حضرة احمـد بك نظيم

ناظـر مدرسـة دار العـلوم وقـلم الترجمـه

(الطبعة الثانية)

بالمطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحميــة

ســنة ١٣٠٨

هجرية



بسم الله الرحمن الرحيم

الجـــــزء الثـــانى

في مساحات كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة

البـــاب الاول

في مسائل كثيرى الاضلاع والخطوط المتناسبة وتشابه الاشكال

الفصـــــل الاوّل

في مسائل كثـــيرى الاضـــلاع

تعـــاريف

(١٠١) مساحة الشكل هى النسبة الكائنة بين مسطحه ومسطح وحدة السطوح وحدة السطوح المتفق عليها هى المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال

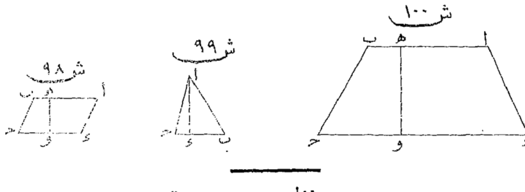
(١٠٢) الشكلان المتكافئان هما المتساويان فى المساحة

يمكن أن يتكافأ الشكلان مع ما بينهما من التباين الكلى فى الصورة فالدائرة مثلا يمكن أن تكافئ مربعا أو مستطيلا أو مثلثا أو غير ذلك

(١٠٣) ارتفاع متوازي الاضلاع ا ب ح ى (شكل ٩٨) هو العمود هـ و الذي يقاس به البعد المحصور بين الضلعين المتوازيين ا ب و ح ى المعتبرين قاعدتين له

(١٠٤) ارتفاع المثلث ا ب ح (شكل ٩٩) هو العمود ا ى الذي يقاس به البعد المحصور بين الرأس ا والضلع ب ح المقابل لها المعتبر قاعدة له

(١٠٥) ارتفاع شبه المنحرف ا ب ح ى (شكل ١٠٠) هو العمود هـ و الذي يقاس به البعد المحصور بين القاعدتين ا ب و ح ى المتوازيتين



دعوى نظرية

(١٠٦) متوازيا الاضلاع المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ١٠١) أعني أن متوازيي الاضلاع ا ب ح ى و ا هـ و ى المتحدين في القاعدة ا ى وفي الارتفاع ى ع هما متكافئان (وبالضرورة تكون قاعدتاهما الاخريان ب ح و هـ و على استقامة واحدة)

ش ١٠١

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ا هـ ب و ى و ح فيهما الضلع ا هـ = الضلع ى و من خاصية متوازي الاضلاع ا هـ و ى والضلع ا ب = الضلع ى ح من خاصية متوازي الاضلاع ا ب ح ى والضلع ب هـ = الضلع ح و لان كل واحد من الضلعين هـ و و ب ح يساوي ا ى فاذا طرح من كل منهما البعد و ب يكون ب هـ = ح و واذن فالمثلثان متساويان

ثم اذا طرح على التعاقب من الشكل الكلي ا هـ ح ى المثلثان المذكوران كان الباقيان هما متوازيا الاضلاع ا ب ح ى و ا هـ و ى واذن يكونان متكافئين وهو المطلوب

تنبيه — حيث ان أحد متوازيي الاضلاع المعلومين يمكن أن يكون مستطيلا فيكون متوازي الاضلاع والمستطيل المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئين

دعوى نظـــــــرية

(١٠٧) النسـبة بين المسـتطيلين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما (شكل ١٠٢)
أعنى ان النسـبة بين المستطيلين ا ب حـ د و ا ب و هـ
المتحدى الارتفاع هـ و هى كالنسـبة بين القاعدتين
ب حـ و ب و

ش ١٠٢

د هـ ا
حـ و ب

وللبرهنة على ذلك يفرض أولا أن القاعدتين ب حـ و ب و
متناسبتان وأن النسبة بينهما كالنسبة بين العددين ٧ و ٤
فاذا قسمت القـاعدة الاولى الى سـبعة أقسام متساوية
فان الثـانية تشتمل ضرورة على أربعـة من هذه التقاسيم ثم اذا أقيمت من نقط التقاسيم أعمدة على
القـاعدة فانه يتشكل سـبعة مستطيلات جزئيـة متساوية يتركب منها المسـتطيل ا ب حـ د
وأما المسـتطيل ا ب و هـ فانه يشتمل على أربعة منها وتكون النسبة حينئذ بينهما كالنسبة بين
العددين ٧ و ٤ وهى عين النسبة بين القاعدتين ب حـ و ب و
وأما اذا لم تكن القاعدتان متناسبتين فانه يبرهن على صحـة هذه النظرية بعـين الطريقة التى
استعملت بنمرة ٨ من الجزء الاول
نتيجـــة — حيث ان الضلعين المتجاورين من المستطيل يمكن تسمية أحدهما قاعدة وثانيهما
ارتفاعا بلا فرق فى ذلك أمكن أن يقـال ان النسبة بين المستطيلين المتحدى القـاعدة كالنسـبة بين
ارتفاعيهما

دعوى نظـــــــرية

(١٠٨) النسبة بين أى مستطيلين تساوى حاصل ضرب النسبة الكائنة بين قاعدتيهما فى النسبة
الكائنة بين ارتفاعيهما وذلك اذا رمز بالرمزين م و مَ للمستطيلين وبالرمزين ن و ع
لقاعدة الاول وارتفاعه وبالرمزين نَ و عَ لقاعدة الثانى وارتفاعه ثم رمز لمستطيل ثالث
بالرمز مً ولقاعدته بالرمز ن ولارتفاعه بالرمز عَ أى فرض أنه متحد مع أحد المستطيلين
فى القاعدة ومع الثانى فى الارتفاع
تحصل بمقتضى النظرية السابقة ونتيجتها أن

$$\frac{م}{مً} = \frac{ع}{عَ} \quad ، \quad \frac{مً}{مَ} = \frac{ن}{نَ}$$

و بضرب هاتين المتساويتين فى بعضهما طرفا بطرف تكون حواصل الضرب متساوية ويحدث

$$\frac{م \times مً}{مً \times مَ} = \frac{ع}{عَ} \times \frac{ن}{نَ} \quad \text{أو} \quad \frac{م}{مَ} = \frac{ن}{نَ} \times \frac{ع}{عَ}$$

وهو المطلوب

مثال — اذا قيست الابعاد ن و ع و نَ و عَ بوحدة ما من وحدات الاطوال وليكن المتر مثلا وكانت مقاديرها هى على الترتيب ٦ متر و ٤ متر و ٣ متر و ٢ متر فانه يحدث

$$\frac{م}{مَ} = \frac{٦}{٣} \times \frac{٤}{٢} = ٢ \times ٢ = ٤$$

أعنى أن المستطيل م يشتمل على المستطيل مَ أربع مرات

دعوى نظـــــــرية

(١٠٩) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

وللبرهنة على ذلك يقال لو فرضنا فى النظرية السابقة أن مَ هو المربع المعتبر وحدة للسطوح وأن كلا من بعديه نَ و عَ مساو لوحدة الاطوال فان المتساوية السابقة وهى

$$\frac{م}{مَ} = \frac{ن}{نَ} \times \frac{ع}{عَ}$$

تدل على أن مساحة المستطيل م تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته فى مقاس ارتفاعه وهو المطلوب

تنبيـــه — هذه النظرية لا تكون حقيقية الا اذا كان وحدة السطوح هو المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال وحيث ان النسبة $\frac{م}{مَ}$ تدل على مقتضى التعريف (١٠١) على مساحة المستطيل م وان النسبتين $\frac{ن}{نَ}$ و $\frac{ع}{عَ}$ تدلان على نتيجتى تقدير الطولين ن و ع بوحدة الاطوال أو على نتيجة مقاسهما أمكن أن يعبر عن مساحة المستطيل بهذا القانون م = ن × ع

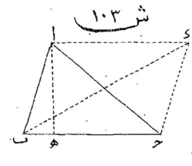
مثال — اذا فرض أن ضلع المربع المعتبر وحدة هو المتر وقدر به البعدان ن و ع وكان مقدارهما ٨ متر و ٤ متر تحصل م = ٨ × ٤ = ٣٢ مترا مربعا

نتيجـة ١ — حيث ان متوازى الاضلاع يكافئ المستطيل المتحد معه فى القاعدة والارتفاع فتكون مساحته مساوية لحاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

نتيجة ٢ ـ حيث ان المربع يمكن اعتباره كأنه مستطيل ضلعاه المتجاوران متساويان فاذا كان ح دالا على مقاس أحد أضلاعه فتكون مساحة المربع مساوية الى ح × ح = ح^2

دعوى نظرية

(١١٠) مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ١٠٣)



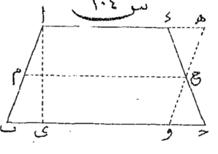
يمد لذلك من النقطتين ا و ح مستقيمان موازيان للضلعين ب ح و ا ب فيتشكل من ذلك متوازى الاضلاع ا ب ح ى المتحد مع المثلث ا ب ح فى القاعدة ب ح وفى الارتفاع ا هـ وحيث كان المثلث نصف متوازى الاضلاع (٥٤ رابعا جزء ١) وكانت مساحة متوازى الاضلاع ا ب ح ى = ب ح × ا هـ فتكون مساحة المثلث ا ب ح = $\frac{1}{2}$ ب ح × ا هـ = $\frac{1}{2}$ ن × ع وهو المطلوب

نتيجة ١ ـ المثلثات المتحدة القاعدة ورؤسها على مستقيم مواز للقاعدة متكافئة لاتحادها فى الارتفاع مثل المثلثين ا ب ح و ى ح ب

نتيجة ٢ ـ حيث ان أى شكل كثير الاضلاع يمكن تقسيمه الى مثلثات بواسطة توصيل أقطاره فيمكن حينئذ تقدير مساحته بواسطة ضم مساحة المثلثات المتركب هو منها على بعضها

دعوى نظرية

(١١١) مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب ارتفاعه فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين (شكل ١٠٤) وللبرهنة على ذلك



يحول شبه المنحرف الى متوازى أضلاع يكافئه بواسطة أن يمر من نقطة ع وسط الضلع ح ى المستقيم هـ و موازيا للضلع ا ب ويمد حتى يقابل القاعدتين فى النقطتين هـ و و فمتوازى الاضلاع الحادث ا ب و هـ يكون مكافئا لشبه المنحرف ا ب ح ى المتحد معه فى الارتفاع لان المثلث و ع ح يساوى المثلث هـ ع ى لتساوى الضلع ع ح للضلع ع ى والزاوية

وجح للزاوية هجد والزاوية جحو للزاوية هدج وينتج من تساويهما أن حو = هد
وحينئذ تكون مساحة متوازي الاضلاع أو شبه المنحرف مساوية الى بو × اى
لكن بو = بح − حو ومن جهة أخرى بو أو اهـ = اد + حو واذن يكون

٢بو = بح + اد أو بو = $\frac{1}{2}$(بح + اد) = $\frac{1}{2}$(ن + نَ)

وبناء عليه تكون مساحة شبه المنحرف مساوية الى $\frac{1}{2}$(ن + نَ) × اى = $\frac{1}{2}$(ن + نَ) × ع
وهو المراد

تنبيه ١ — اذا مد من نقطة ع وسط المستقيم دح المستقيم عم موازيا للمستقيم اد فتكون نقطة م وسط الضلع اب ضرورة ويكون عم مساويا الى بو أو مساويا الى $\frac{1}{2}$(ن + نَ) وتكون مساحة شبه المنحرف مساوية الى عم × ع
أعني أن مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب المستقيم المتوسط في الارتفاع

تنبيه ٢ — قد ذكرنا بنمرة (١١٠ نتيجة ٢) انه يمكن أخذ مساحة أي شكل كثير الاضلاع بواسطة تقسيمه الى مثلثات وضم مساحتها على بعضها والان نقول انه يوجد طريقة أخرى لايجاد مساحة أي شكل كثير الاضلاع مستعملة غالبا في الاعمال وهي تقسيم الشكل المطلوب أخذ مساحته الى مثلثات او أشباه منحرف (شكل ١٠٥) قائمة بواسطة انزال جملة أعمدة من جميع رؤس زواياه على أحد أقطاره اهـ مثلا وحيث ان مقادير اجزاء القاعدة ومقادير الاعمدة يمكن مقاسها بغاية الدقة فيتوصل بالطرق المتقدمة الى أخذ مساحة الاجزاء المختلفة المتركب منها الشكل المذكور ثم تجمع على بعضها

ومع ذلك فلا يشترط مد القطر اهـ لانه يمكن الوصول الى المقصود بواسطة مد مستقيم اما أن يقابل الشكل المذكور أو لا يقابله ثم ينزل من رؤس زواياه أعمدة عليه وتؤخذ مساحات الاجزاء المحصورة بين الاعمدة وبين المستقيم الممدود

دعوى نظرية

(١١٢) المربع المنشأ على مجموع مستقيمين يمكن اعتبار تركيبه من أجزاء ثلاثة وهي

أولا - المربع المنشأ على أحد الخطين
ثانيا - المربع المنشأ على الخط الثانى
ثالثا - ضعف المستطيل الذى قاعدته أحد المستقيمين وارتفاعه المستقيم الآخر (شكل ١٠٦)

فاذا كان اى = ح أحد الخطين , ى ب = ء الخط الآخر ومجموعهما هو ا ب = ح + ء وأنشأ المربع ا ب ح ء على ا ب ثم مد من نقطة ى المستقيم ى ع موازيا ا ء وأخذ ا و = اى ومد و ل موازيا ا ب تحصل أن

و ه = ء ع = اى = ا و = ى ه = ب ل = ح ,

ه ل = ح ع = ب ى = و ء = ه ع = ل ح = ء

وحينئذ يكون ا ى ه و هو المربع المنشأ على ح , ه ل ح ع هو المربع المنشأ على ء والشكلان ى ب ل ه , ه ع ء و هما مستطيلان متساويان ومتساويان فى البعدين ح , ء وبذلك يثبت المطلوب

تنبيه - اذا دل ح , ء على مقاسى الخطين ا ى , ى ب فان ح + ء يدل على مقاس الخط ا ب وحيث ان مساحة المربع تساوى القوة الثانية لمقاس ضلعه فانه يتوصل الى

$$(ح + ء)^٢ = ح^٢ + ء^٢ + ٢ ح ء$$

وهو قانون يمكن البرهنة عليه بواسطة القواعد الحسابية

دعوى نظرية

(١١٣) المربع المنشأ على فاضل خطين يكافئ مجموع مربعيهما ناقصا ضعف مستطيلهما (شكل ١٠٧)

فاذا كان ا ب = ح أحد الخطين , ب ح = ء الخط الثانى وفاضلهما ا ح = ح - ء وأنشأ المربع ا ب ى و على ا ب ثم مد ى و على استقامته جهة و وأخذ و ل = ب ح = ء ثم أخذ ا ه = ا ح = ح - ء ورسم المستقيم ه ط موازيا ا ب وأخذ على امتداده

هـ ك = ب ح ووصل ل ك ومدّ من نقطة ح المستقيم ح ع موازيا أ و تحصل

أ ب = ح ع = ع ل = ح و

ب ح = ط ى = ل ك = د

وحينئذ يكون الشكل أ ح د هـ هو المربع المنشأ على أ ح أو على ح — د والشكل هـ ك ل و هو المربع المنشأ على ح ب أو على د والشكلان ب ى ع ح و ع د ك ل هما مستطيلان متساويان وقاعدة كل واحد منهما ح وارتفاعه د

فاذا طرحنا من الشكل الكلى الذى هو عبارة عن مجموع المربعين المستطيلين السابقين كان الباقى مساويا للمربع المنشأ على أ ح وهو المطلوب

تنبيه — اذا دل العددان ح و د على مقاسى الخطين أ ب و ب ح فيكون ح — د دالا على مقاس الفرق بينهما واذن يكون

$$(ح - د)^2 = ح^2 + د^2 - 2 ح د$$

دعوى نظـــــرية

(١١٤) المستطيل المنشأ على مجموع خطين وفاضلهما يساوى الفرق بين مربعيهما (شكل ١٠٨)

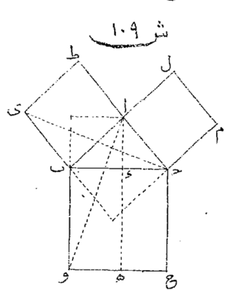
فاذا كان أ ب = ح أحد الخطين و ب ح = د الخط الآخر و أ ك = ح + د مجموعهما و أ ح = ح — د فاضلهما ثم أنشأ المربع أ ب ى و على أ ب وأخذ أ هـ = أ ح ورسم المستقيم هـ ل موازيا الى أ ب والمستقيمان ك ل و ح ع موازيين الى أ و حدث أن أ ح د هـ هو المربع المنشأ على أ ح أو ح — د وأن الشكل د ط ى ع هو المربع المنشأ على ب ح أو د وأن الشكلين هـ د ع و و ل ك ب ط هما مستطيلان متساويان وقاعدة كل واحد منهما مساوية أ ح أو ح — د وارتفاعهما ب ح = د وحينئذ لو أسقط المربع د ط ى ع من المربع أ ب ى و لكان الباقى منه مكافئا للمستطيل أ ك ل هـ وذلك لان بينهما المستطيل أ ب ط هـ مشترك والباقى من المستطيل أ ك ل هـ هو المستطيل ب ك ل ط ومن المربع المستطيل د هـ و ع وحيث كان هذان المستطيلان الاخيران متساويين ثبت المطلوب

تنبيـــه - اذا دل العددان ح و ى على مقاسى الخطين اب و بح فيكون ح + ى دالا على مقاس مجموعهما و ح - ى دالا على مقاس فاضلهما ويكون (ح + ى)(ح - ى) = ح^٢ - ى^٢

دعوى نظـــــــرية

(١١٥) المربع المنشأ على وتر القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه (شكل ١٠٩) (هذه النظرية منسوبة الى فيثاغورس)

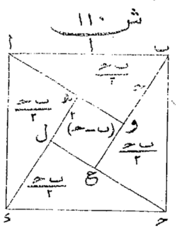
فاذا كان اب ح مثلثا قائم الزاوية وأنشأت المربعات حو ، و حل و بط على أضلاعه الثلاثة وأنزل من الرأس ا العمود اهـ على الوتر حب انقسم المربع حو الى مستطيلين حهـ ، ى و ويطلب البرهنة على أن المستطيل حهـ يكافئ المربع حل والمستطيل ى و يكافئ المربع بط



وللوصول الى ذلك يوصل المستقيمان ى ح و او ثم يتصور دوران المثلث ى ب ح حول نقطة ب بمقدار زاوية قائمة فيقع الضلع ب ى على الضلع ب ا وتقع نقطة ى على نقطة ا وكذا ينطبق الضلع ب ح على الضلع ب و وتقع نقطة ح على نقطة و وحينئـذ يكون المثلث ى ب ح مساويا للمثلث اب و لكن المثلث ى ب ح متحـد مع المربع اى فى القاعدة والارتفاع فيكون نصفه وكذلك المثلث اب و هو نصف المستطيل ى و لاتحاده معه فى القاعدة والارتفاع وبناء عليه يكون المربع اى مكافئا للمستطيل ى و وبمثل ذلك يبرهن على تكافئ المربع حل للمستطيل حهـ واذن يكون $\overline{بح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{اح}^2$ وهو المطلوب

* (ويمكن البرهنة على هذه النظرية بطريقة أخرى شكل ١١٠)
* بأن يقال اذا كان اب وتر المثلث القائم الزاوية المفروض وأنشأ عليه المربع اب ح ى بحيث
* يشمل المثلث ثم أنزل من نقطة ح العمود حع على امتـداد الضلع ب و فالمثلث القائم
* الزاوية ب ح ع الحادث يكون مساويا للمثلث اب و لان فيهما الوتر ب ح = الوتر اب

* والزاوية حبع = الزاوية ب ا و لان كل واحدة منهما تتم زاوية ا ب و على قائمة
* وحينئذ يكون الضلع ب ع = ا و والضلع
* ح ع = ب و ويكون بناء عليه و ع = ا و ــ ب و
* ثم اذا أجرى فى نقطة د عمل مشابه لما أجرى فى نقطة ح
* فان المثلثين الحادثين يكونان متساويين ومساويين
* للمثلث ا ب و ويكون ع ل = ل ه = ه و = و ع
* = ا و ــ ب و وبالتأمل فى الشكل يشاهد أن المربع
* ا ب ح د يتركب من خمسة أجزاء وهى المربع و ع ل ه



* وأربع مثلثات متساوية قاعدة كل واحد منها ب و وارتفاعه ا و ومساحة كل منها
* مساوية $\frac{1}{2}$ ب و × ا و
* فاذا رمز بالرموز ا و ب و ح لاضلاع المثلث القائم الزاوية حدث

$$\text{ا}^2 = (\text{ب} - \text{ح})^2 + 4 \times \frac{\text{ب ح}}{2} = (\text{ب} - \text{ح})^2 + 2\,\text{ب ح}$$

* لكن $(\text{ب} - \text{ح})^2 = \text{ب}^2 + \text{ح}^2 - 2\,\text{ب ح}$ (١١٣) فبالاستعواض يحدث

$$\text{ا}^2 = \text{ب}^2 + \text{ح}^2$$

* وهو المطلوب

نتيجة ١ ـ يتوصل بالارتباط $\overline{\text{ب ح}}^2 = \overline{\text{ا ب}}^2 + \overline{\text{ا ح}}^2$ الى ايجاد أى ضلع من أضلاع المثلث القائم الزاوية متى علم الاثنان الآخران أعنى يكون

$$\overline{\text{ا ب}}^2 = \overline{\text{ب ح}}^2 - \overline{\text{ا ح}}^2 \quad \text{أو} \quad \overline{\text{ا ح}}^2 = \overline{\text{ب ح}}^2 - \overline{\text{ا ب}}^2$$

نتيجة ٢ ـ تكافؤ المستطيلين ب ه و د ع للمربعين ب ط و ا م يتوصل به الى هذين القانونين

$$\overline{\text{ا ح}}^2 = \text{ح ع} \times \text{ح د} = \text{ب ح} \times \text{ح د} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ب ح}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب د}} \quad \text{و}$$

$$\overline{\text{ا ب}}^2 = \text{ب و} \times \text{ب د} = \text{ب ح} \times \text{ب د} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ب ح}}{\text{ا ح}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{ح د}}$$

ومنهما

$$\frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ا ح}}^2} = \frac{\text{ب د}}{\text{ح د}}$$

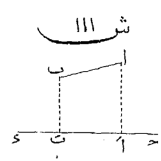
أعنى أن أى ضلع من ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بتمامه وسهم الوتر المجاور له وأن النسبة بين مربعى ضلعى القائمة مساوية للنسبة الكائنة بين سهمى الوتر

نتيجـــة ٣ ـ اذا كان المثلث القائم الزاوية المعلوم ا ب ح متساوى الساقين بأن كان فيـه ا ب = ا ح فانه يحدث بناء على ما تقرر أن

$$\overline{ب ح}^٢ = ٢\ \overline{ا ب}^٢ \quad أو \quad \frac{\overline{ب ح}^٢}{\overline{ا ب}^٢} = ٢ \quad أو \quad \left(\frac{ب ح}{ا ب}\right)^٢ = ٢$$

أعنى أن القوة الثانية للنسـبة الكائنة بين قطر المربع وضلعه هى ٢ وحينئذ تكون نفس هذه النسبة مساوية $\sqrt{٢}$ ويحدث $\frac{ب ح}{ا ب} = \sqrt{٢} = ١{,}٤١٤٢$

تعـــــــريف



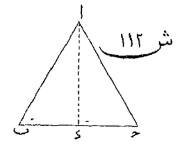
(١١٦) مسقط المستقيم ا ب (شكل ١١١) على المستقيم ح ى هو المستقيم ا َ ب َ المحصور بين موقعى العمودين النازلين من نهايتى المستقيم ا ب على المستقيم ح ى

دعوى نظـــــــرية

(١١٧) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية حادة من أى مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه ناقصا ضعف المستطيل الذى قاعدته أحد الضلعين المذكورين وارتفاعه مسقط الثانى عليه

يمكن اعتبار حالتين فى هـذه الدعوى وهما على حسب وقوع العمود المسقط لضلع المثلث داخله أو خارجه

الحالة الاولى ـ (شكل ١١٢) نفرض أن الزاوية الحادة هى ح وأن موقع العمود ا ى حاصل داخل المثلث على الضلع ب ح



فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية ا ب ى أن $\overline{ا ب}^٢ = \overline{ا ى}^٢ + \overline{ب ى}^٢$

ومن المثلث القائم الزاوية ا ى ح أن $\overline{ا ى}^٢ = \overline{ا ح}^٢ - \overline{ح ى}^٢$

وحيث أن

$$\overline{ب ى}^٢ = (ب ح - ى ح)^٢ = \overline{ب ح}^٢ + \overline{ى ح}^٢ - ٢\ ب ح \times ى ح$$

يكون

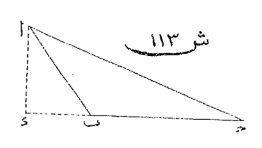
$$\text{أب}^2 = \text{أح}^2 - \text{حء}^2 + \text{بح}^2 + \text{ءح}^2 - ٢\,\text{بح} \times \text{حء} \quad \text{او}$$

$$\text{أب}^2 = \text{أح}^2 + \text{بح}^2 - ٢\,\text{بح} \times \text{حء}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية — (شكل ١١٣) نفرض أن الزاوية الحادة هى ح وأن موقع العمود أء حاصل خارج المثلث على امتداد بح فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية أبء أن

$$\text{أب}^2 = \text{أء}^2 + \text{بء}^2$$



ومن المثلث القائم الزاوية أءح أن

$$\text{أء}^2 = \text{أح}^2 - \text{حء}^2$$

وحيث أن

$$\text{بء}^2 = (\text{ءح} - \text{بح})^2 = \text{ءح}^2 + \text{بح}^2 - ٢\,\text{ءح} \times \text{بح}$$

يكون

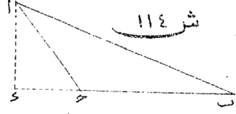
$$\text{أب}^2 = \text{أح}^2 - \text{حء}^2 + \text{ءح}^2 + \text{بح}^2 - ٢\,\text{ءح} \times \text{بح} \quad \text{أو}$$

$$\text{أب}^2 = \text{أح}^2 + \text{بح}^2 - ٢\,\text{ءح} \times \text{بح}$$

وهو المطلوب

دعوى نظريه

(١١٨) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية منفرجة فى أى مثلث منفرج الزاوية يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه زائدا ضعف المستطيل الذى قاعدته أحد الضلعين وارتفاعه مسقط الثانى عليه (شكل ١١٤)



لنفرض أن ح هى الزاوية المنفرجة وأن حء مسقط الضلع أح على الضلع بح

فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية أبء أن

$$\text{أب}^2 = \text{أء}^2 + \text{بء}^2$$

ومن المثلث أ د ح القائم الزاوية أن

$$\overline{\text{أد}} = \overline{\text{أح}} - \overline{\text{دح}}$$

وحيث أن

$$\overline{\text{بد}} = (\text{بح} + \text{حد})^{2} = \overline{\text{بح}} + \overline{\text{حد}} + ٢\,\text{بح} \times \text{حد}$$

يكون

$$\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أح}} - \overline{\text{دح}} + \overline{\text{بح}} + \overline{\text{حد}} + ٢\,\text{بح} \times \text{حد} = \overline{\text{أح}} + \overline{\text{بح}} + ٢\,\text{بح} \times \text{حد}$$

وهو المراد

تنبيـــه ـ يستفاد من هذه النظرية واللتين قبلها أن المثلث القائم الزاوية ينفرد دون غيره من المثلثات بهذا الارتباط وهو $\text{أ}^{2} = \text{ب}^{2} + \text{ح}^{2}$

وحينئذ فمتى وجد هذا الارتباط بين أضلاع أى مثلث فانه يحكم فى الحال بأنه قائم الزاوية وعليه فالمثلث الذى مقاس أضلاعه هى ٥ و ٤ و ٣ هو قائم الزاوية لان $٥^{2} = ٤^{2} + ٣^{2}$

دعوى نظـــــرية

(١١٩) مجمـــوع مربعى أى ضلعين من أى مثلث يكافئ ضعف مربع المستقيم المتوسط المحصور بينهما زائدا ضعف مربع نصف الضلع الثالث

ش ١١٥

(المستقيم المتوسط هو المار بين رأس المثلث ومنتصف القاعدة)
(شكل ١١٥)

فاذا كان أو المستقيم المتوسط بالنسبة للضلع بح وكان أد عمودا عليه تكون زاوية أوب منفرجة ويتحصل بمقتضى نظرية نمرة (١١٨) ان

$$\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أو}} + \overline{\text{بو}} + ٢\,\text{وب} \times \text{ود} \qquad (١)$$

وحيث ان زاوية أوح حادة يتحصل أيضا بمقتضى نظرية نمرة (١١٧) أن

$$\overline{\text{أح}} = \overline{\text{أو}} + \overline{\text{حو}} - ٢\,\text{حو} \times \text{ود} \qquad (٢)$$

فاذا جمعت هاتان المتساويتان على بعضهما ولوحظ أن حو = بو يحدث

$$\overline{\text{أب}} + \overline{\text{أح}} = ٢\,\overline{\text{أو}} + ٢\,\overline{\text{حو}}$$

وهو المطلوب

تنبيــه ـ اذا رمز بالحروف ا و ب و حـ لاضلاع المثلث وبالحروف ل و م و ن للمستقيمات المتوسطة المقابلة لها حدث

$$\text{ب}^2+\text{حـ}^2=2\,\text{ل}^2+\frac{\text{ا}^2}{2} \quad \text{و}$$

$$\text{حـ}^2+\text{ا}^2=2\,\text{م}^2+\frac{\text{ب}^2}{2} \quad \text{و}$$

$$\text{ا}^2+\text{ب}^2=2\,\text{ن}^2+\frac{\text{حـ}^2}{2}$$

وهى متساويات يتوصل بها الى ايجاد مقادير المستقيمات المتوسطة اذا علم مقادير الاضلاع الثلاثة للمثلث وبالعكس

نتيجة ١ ـ مجموع مربعات أضلاع أى شكل متوازى الاضلاع يكافئ مجموع مربعى قطريه

نتيجة ٢ ـ الفرق بين مربعى أى ضلعين من مثلث يكافئ ضعف المستطيل الذى قاعدته الضلع الثالث وارتفاعه مسقط المستقيم المتوسط عليه

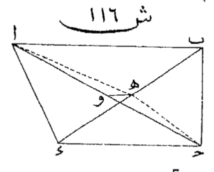
وذلك لانه لو طرحت المتساوية (٢) من المتساوية (١) السابقتين يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2-\overline{\text{اح}}^2=4\,\text{حو}\times\text{دو}=2\,\text{حب}\times\text{دو}$$

وهو المراد

دعوى نظـــــــرية

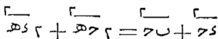
(١٢٠) مجموع مربعات أضـلاع أى شكل رباعى يكافئ مجموع مربعى قطريه زائدا أربعة أمثال مربع المستقيم الواصل بين منتصفى القطرين (شكل ١١٦)



فاذا كانت نقطة و وسط القطر اح ونقطة هـ وسط القطر ب د فانه يؤخذ من المثلث اب د أن (١١٩)

$$\overline{\text{اب}}^2+\overline{\text{اد}}^2=2\,\overline{\text{اهـ}}^2+2\,\overline{\text{دهـ}}^2$$

وكذلك يؤخذ من المثلث ب د ح أن



$$\overline{\text{دح}}^2+\overline{\text{بح}}^2=2\,\overline{\text{حهـ}}^2+2\,\overline{\text{دهـ}}^2$$

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2+\overline{\text{اد}}^2+\overline{\text{دح}}^2+\overline{\text{بح}}^2=2\left(\overline{\text{اهـ}}^2+\overline{\text{حهـ}}^2\right)+\overline{\text{بد}}^2$$

لكن المثلث اهح يؤخذ منه أيضاً أن

اه٢ + هح٢ = ٢ هو٢ + ٢ وح٢ أو

٢ (اه٢ + هح٢) = ٤ هو٢ + ٤ وح٢ = ٤ وه٢ + اح٢

ومع الاستعواض يحدث

اب٢ + اد٢ + دح٢ + بح٢ = بد٢ + اح٢ + ٤ وه٢

وهو المطلوب

نتيجة – اذا انعدم هو بأن كان القطران ينصفان بعضهما فيكون الشكل متوازى الاضلاع ويكون مجموع مربعات أضلاعه مكافئاً لمجموع مربعى قطريه وبذلك قد توصلنا الى النتيجة الاولى من النظرية السابقة

وبالعكس اذا وجد فى شكل رباعى أن مجموع مربعات أضلاعه يكافئ مجموع مربعى قطريه فيكون متوازى الاضلاع

الفصل الثانى

فى الخطوط المتناسبة

دعوى نظرية

(١٢١) اذا قطع ضلعا مثلث بمستقيم موازٍ ضلعه الثالث فانه يقسمهما الى أجزاء متناسبة (نظرية طاليس) (شكل ١١٧)

أعنى اذا كان هد موازيا حب وقاطعاً للضلعين اب و اح فانه يقسمهما الى أجزاء متناسبة

وللبرهنة على ذلك نفرض أولاً أن المستقيمين اد و دب متناسبان أى أنه يوجد بينهما مقياس مشترك خطى ينحصر فى الاول ٣ مرات مثلاً وفى الثانى مرتين فتكون النسبة بينهما مساوية الى $\frac{٣}{٢}$

ثم اذا مد من نقط تقاسيم اب مستقيمات موازية ب ح فان امتدادات المحصورة بينها من المستقيم اح أجزاء متساوية أعنى أن

$$\text{ال} = \text{لم} = \text{مه} = \text{هن} = \text{نح}$$

وذلك لانه اذا مد من نقطتى ل و ه مثلا المستقيمان لع و هك موازيين الى اب فالمستقيم لع يصير مساويا ىع لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين وبعين هذا السبب يكون هك مساويا ىو واذن يكون لع مساويا هك وبناء عليه يكون المثلثان لعم و هكن متساويين لان فيهما الضلع لع مساو للضلع هك والزاوية ملع مساوية للزاوية نهك لانهما زاويتان متناظرتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين لع و هك والقاطع ان والزاوية مع ل مساوية للزاوية نكه لتوازى أضلاعهما المتناظرة واتجاهها فى جهة واحدة وينتج من تساويهما أن $\text{مل} = \text{نه}$ وبمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى أجزاء المستقيم اح وحينئذ فينقسم اه الى ثلاثة أجزاء متساوية وينقسم هح الى جزأين متساويين وتكون النسبة بينهما مساوية الى $\frac{٣}{٢}$ وهى عين النسبة الكائنة بين اى و ىب ويحدث $\frac{\text{اى}}{\text{ىب}} = \frac{\text{اه}}{\text{هح}}$

وأما اذا لم يكن المستقيمان اى و ىب متناسبين فانه يبرهن بمثل ما سبق ذكره بنمرة (٨٠ جزأول) على أن النسبتين $\frac{\text{اى}}{\text{ىب}}$ و $\frac{\text{اه}}{\text{هح}}$ محصورتان بين عددين متواليين من أجزاء الاعشار أو من أجزاء المئين أو من أجزاء الالوف وهكذا واذن فهما متساويتان

نتيجة ١ — يمكن وضع التناسب $\frac{\text{اى}}{\text{ىب}} = \frac{\text{اه}}{\text{هح}}$ على الصور الآتية

$$\frac{\text{اى}}{\text{اه}} = \frac{\text{ىب}}{\text{هح}} \qquad (١)$$

$$\frac{\text{اى}}{\text{اى}+\text{ىب}} = \frac{\text{اه}}{\text{اه}+\text{هح}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{اى}}{\text{اب}} = \frac{\text{اه}}{\text{اح}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{اى}}{\text{اه}} = \frac{\text{اب}}{\text{اح}} \qquad (٢)$$

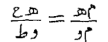
$$\frac{\text{اى}+\text{ىب}}{\text{ىب}} = \frac{\text{اه}+\text{هح}}{\text{هح}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{اب}}{\text{ىب}} = \frac{\text{اح}}{\text{هح}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{اب}}{\text{اح}} = \frac{\text{ىب}}{\text{هح}} \qquad (٣)$$

نتيجة ٢ — أجزاء المستقيمين اب و حى المحصورة بين المستقيمات المتوازية اح و هو و عط و بى الخ تكون متناسبة (شكل ١١٨)

فاذا كانت م نقطة تلاقى المستقيمين اب و حى فان المثلث مهو يكون فيه المستقيم اح موازيا للقاعدة ه و ويؤخذ منه أن

$$\frac{\text{مه}}{\text{مو}} = \frac{\text{اه}}{\text{حو}}$$

ويؤخذ أيضا من المثلث م ع ط أن

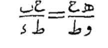


$$\frac{مه}{مو}=\frac{هع}{وط}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج أن

$$\frac{اه}{حو}=\frac{هع}{وط}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن



$$\frac{هع}{وط}=\frac{عب}{طد}$$

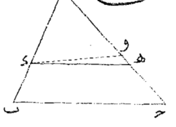
وحينئذ يكون

$$\frac{اه}{حو}=\frac{هع}{وط}=\frac{عب}{طد}$$

وهو المطلوب

دعوى نظرية

(١٢٢) عكس النظرية السابقة صحيح أعنى اذا قسم مستقيم ضلعى مثلث الى أجزاء متناسبة يكون موازيا لقاعدته (شكل ١١٩)



أعنى اذا كان $\frac{اد}{دب}=\frac{اه}{هح}$ يكون ده موازيا بح

وللبرهنة على ذلك يقال ان لم يكن ده موازيا بح لكان غيره دو مثلا مارا بنقطة د ويحدث على مقتضى النظرية السابقة أن $\frac{اد}{دب}=\frac{او}{وح}$ وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب المفروض وهو $\frac{اد}{دب}=\frac{اه}{هح}$ يتحصل منهما ان $\frac{او}{وح}=\frac{اه}{هح}$ وهو تناسب فاسد لان بسط الكسر الاول او أصغر من بسط الكسر الثانى اه ومقام الاول وح أكبر من مقام الثانى هح وحينئذ لايمكن أن يكون دو مستقيما آخر خلاف ده وهو المطلوب

دعوى نظـــــــرية

(١٢٣) المستقيم المنصف لاحدى زوايا مثلث أو المكملة لها يحدد على قاعدته أو على امتدادها نقطة تكون النسبة بين بعديها عن نهايتى القاعدة مساوية للنسبة الكائنة بين بعدى رأسه عن نهايتى القاعدة المذكورة (شكل ١٢٠)

(الحالة الاولى) ـ اذا كان المستقيم اى منصفا للزاوية ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم ح ه موازيا ا ى ويمد حتى يلاقى امتداد المستقيم ب ا فى نقطة ه

فالمثلث ب ه ح الحادث فيه المستقيم اى موازٍ للقاعدة ح ه فيقسم الضلعين ب ه و ب ح الى أجزاء متناسبه (١٢١) ويحدث

$$\frac{\text{ب ى}}{\text{ى ح}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ه}}$$

لكن المثلث ا ح ه متساوى الساقين لان فيه زاوية ا ح ه = زاوية ى ا ح حيث انهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين اى و ح ه والقاطع ا ح وكذا فيه زاوية ا ه ح = زاوية ب ا ى لانهما متناظرتان بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب ه وحيث كان الزاويتان ب ا ى و ى ا ح متساويتين فرضا تكون الزاويتان ا ح ه و ا ه ح كذلك وحينئذ يكون الضلع ا ح = الضلع ا ه

فاذا استعوض فى التناسب السابق ا ه بما يساويه ا ح يحدث $\frac{\text{ب ى}}{\text{ى ح}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ح}}$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) ـ اذا كان المستقيم ا و منصفا للزاوية الخارجة ح ا ه المكملة لزاوية ب ا ح يرسم من نقطة ح المستقيم ح ع موازيا للمستقيم ا و ويمد ا و حتى يلاقى امتداد القاعدة ب ح فى نقطة و

فالمثلث الحادث ب ا و فيه المستقيم ح ع موازٍ لقاعدته ا و فيقسم الضلعين ب ا و ب و الى أجزاء متناسبة ويحدث $\frac{\text{ب و}}{\text{ح و}} = \frac{\text{ب ا}}{\text{ا ع}}$

لكن المثلث ع ا ح متساوى الساقين لان فيه زاوية ع ح ا = زاوية ح ا و لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين ح ع و ا و المتوازيين والقاطع ا ح وكذا زاوية ا ع ح تساوى

زاوية واهـ لانهما متناظرتان بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع ب هـ وحينئذ يكون اع = اح فاذا استعوض فى التناسب السابق اع بما يساويه وهو اح يحدث

$\frac{بو}{بح} = \frac{با}{اح}$ وهو المراد

* نتيجة — يمكن أن يعرف مما ذكر المحل الهندسى للنقط التى تكون النسبة بين ابعادها
* عن نقطتين ثابتتين ب و ح مساوية لنسبة معلومة $\frac{م}{ن}$
* وللوصول الى ذلك يلاحظ أولا أنه لايوجد على المستقيم الجامع للنقطتين ب و ح الا
* نقطتان فقط تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن النقطتين ب و ح مساوية
* للنسبة $\frac{م}{ن}$ (شكل ١٢١)

ش ١٢١

* أما بين النقطتين ب و ح فانه لايوجد الا نقطة
* واحدة فقط مثل ا بحيث يكون $\frac{اب}{اح} = \frac{م}{ن}$ لانه
* لو وجدت نقطة أخرى مثل اَ وحدث $\frac{اَب}{اَح} = \frac{م}{ن}$ وقورن هذا بالتناسب السابق
* لحدث $\frac{اب}{اح} = \frac{اَب}{اَح}$ وهو تناسب ظاهر الفساد
* ثم اذا فرض ان م > ن فأقول أيضا انه لايوجد الا نقطة واحدة فقط على امتداد المستقيم
* ب ح مثل نقطة د بحيث يكون $\frac{دب}{دح} = \frac{م}{ن}$ وذلك لانه لو وجدت نقطة أخرى مثل
* نقطة دَ وتحصل منها $\frac{دَب}{دَح} = \frac{م}{ن}$ ثم قارناهذا التناسب بالسابق لظهر أن
* $\frac{دب}{دح} = \frac{دَب}{دَح}$ أو $\frac{دب - دح}{دح} = \frac{دَب - دَح}{دَح} = \frac{حب}{دح} = \frac{حب}{دَح}$
* وهو تناسب فساده بين
* اذا تقرر هذا وفرض ان م احدى نقط المستوى موفية لهذا الشرط وهو $\frac{مب}{مح} = \frac{م}{ن}$
* (شكل ١٢٢)

ش ١٢٢

* فانا ننصف الزاوية حمب بالمستقيم ما
* فيحدث على مقتضى هذه النظرية أن
* $\frac{اب}{اح} = \frac{مب}{مح} = \frac{م}{ن}$

ثم اذا نصفنا الزاوية الخارجة حمهـ بالمستقيم
مد حدث أيضا أن

$$\frac{\text{د ب}}{\text{د ح}} = \frac{\text{م ب}}{\text{م ح}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

* وحينئذ يشاهد ان المستقيمين المنصفين لزاويتى أى نقطة من نقط المحل الهندسى مثل نقطة م
* يقابلان المستقيم ب ح فى نقطتين ثابتتين ا و د (حيث قد ثبت عدم امكان وجود غيرهما)
* تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن ب و ح مساوية للنسبة $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$
* ولما كان المستقيمان المنصفان للزاويتين المتجاورتين المتكاملتين هما متعامدان ينتج حينئذ
* ان جميع نقط المحل الهندسى كائنة على محيط الدائرة التى قطرها ا د
* ويمكن البرهنة أيضا عن عكس ماذكر أعنى أن أى نقطة من نقط محيط الدائرة تكون احدى
* نقط المحل الهندسى
* وذلك لانه اذا كانت م احدى نقط المحيط (شكل ١٢٢) فنصل م ح و م ب وننصف
* زاوية ح م ب بالمستقيم م ا والزاوية المكملة ح م هـ بالمستقيم م د ونمد المستقيم
* ح هـ موازيا م ا و ح هَ موازيا م د ويحدث
* $\frac{\text{م هـ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$ وكذا يحدث $\frac{\text{م هَ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{د ح}}{\text{د ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$
* ومنهما ينتج ان م هـ = م هَ لكنه حيث كانت زاوية هـ ح هَ قائمة لان ضلعيها موازيان
* بالتناظر للمستقيمين م ا و م د ينتج ان م هـ = م هَ = م ح (لانه لو رسم محيط دائرة على
* هـ هَ وكان مركزه م فانه يمر بنقطة ح ويكون فيه ح م و م هـ و م هَ أنصاف أقطار)
* واذن يحدث $\frac{\text{م ح}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$ وهو المراد

الفصـــــل الثالث

فى تشابه الاشـــكال

تعـــــــــريف

(١٢٤) كثيرا الاضلاع المتشابهان هما اللذان تساوت زواياهما المتناظرة وتناسبت أضلاعهما المتناظرة ونعنى بالاضـلاع المتناظرة فى كثيرى الاضـلاع المتشابهين الاضـلاع المجاورة لزوايا متساوية

اذادل عدد ن على عدد أضلاع كل واحد من كثيرى أضلاع متشابهين فان شرط تساوى زواياهما المتناظرة يتوصل به الى متساويات عددها ن − ١ أو الى شروط عددها ن − ١ وكذا شرط تناسب الاضلاع يتوصل به الى متساويات أو تناسبات عددها ن − ١ وحينئذ فتعريف التشابه يقضى بان الشكلين المتشابهين يجب أن يوفيا شروطا قدرها ٢ ن − ٢ ومع ذلك فانا نرى فيما يأتى ان تشابه الشكلين يكفيه فقط شروط عددها ٢ ن − ٤

وأما المثلثان المتشابهان فهما اللذان تكون زواياهما المتناظرة متساوية وأضلاعهما المتناظرة متناسبة ونعنى بالاضلاع المتناظرة هنا الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية

وتعريف تشابه المثلثات يحتاج الى أربعة شروط وهى ا = اَ و ب = بَ و $\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ} = \frac{بح}{بَحَ}$ اذا كان المثلثان هما اب ح و اَبَحَ

وسنرى فيما يأتى ان وجود شرطين من هذه الشروط الاربعة فى مثلثين يتوصل بهما الى تحقيق وجود الشرطين الباقيين فيهما وحينئذ فهما كافيان لحصول التشابه

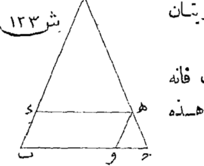
المبحث الاوّل

فى تشابه المثلثات

(١٢٥) قبل التكلم على تشابه المثلثات نذكر هذه الفائدة

(١٢٦) (فائدة) كل مستقيم يوازى قاعدة مثلث وقاطع ضلعيه الآخرين يحدد مثلثا مشابها للمثلث الاصلى

أعنى اذا كان المستقيم ده موازيا للقاعدة ب ح من المثلث اب ح وقاطعا للضلعين اح و اب (شكل ١٢٣) يكون المثلث اده مشابها للمثلث اب ح وللبرهنة على ذلك يقال



أوّلا − ان زوايا المثلثين متساوية لان زاوية ا مشتركة بينهما وزاوية اهد = زاوية ح بالتناظر ومثلهما الزاويتان اده و ب

ثانيا − اذا مد المستقيم هو موازيا للمستقيم اب فانه يحدث على مقتضى نظرية طاليس نمرة ١٢١ توالى هذه المتساويات

$$\frac{اد}{اب} = \frac{اه}{اح} = \frac{بو}{بح}$$

وحيث كان ب و = ء هـ لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين يحدث

$$\frac{اء}{ب} = \frac{اهـ}{اح} = \frac{ءهـ}{بح}$$

وهو المراد

دعوى نظـــــرية

(١٢٧) اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

أعني اذا كانت زاوية ا = اَ و ب = بَ , ح = حَ

يكون

$$\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ} = \frac{بح}{بَحَ}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ اء = اَبَ ويرسم المستقيم ءهـ موازيا للقاعدة بح فالمثلث الحادث اءهـ يكون مشابها للمثلث ابح (فائدة نمرة ١٢٦) وتكون زاوية اءهـ = زاوية ب وزاوية اهـء = زاوية ح ويكون أيضا

$$\frac{اب}{اء} = \frac{اح}{اهـ} = \frac{بح}{ءهـ} \qquad (١)$$

وحينئذ فلم يبق علينا سوى البرهنة على ان المثلث اءهـ يساوي المثلث اَبَحَ وهي لا تحتاج الا الى البرهنة على ان زاوية اءهـ = بَ وللوصول الى ذلك يقال

ان زاوية اءهـ = زاوية ب بالتناظر وهذه الزاوية الاخيرة تساوي زاوية بَ فرضا فتكون زاوية اءهـ = زاوية بَ وينتج من تساوي المثلثين ان اهـ = اَحَ , ءهـ = بَحَ فاذا أبدل في المتساوية (١) الاضلاع اء , اهـ , ءهـ بما يساويها يحدث

$$\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ} = \frac{بح}{بَحَ}$$

وهو المطلوب

نتيجة ١ ــ المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين (نمرة ٥١ جزء أول)

نتيجة ٢ — حيث يكفى لتشابه مثلثين تساوى زاويتين من أحدهما النظيرتيهما من الثانى فيكفى اذن لتشابه مثلثين قائمى الزاوية مساواة زاوية حادة من أحدهما النظيرتها من الثانى

دعوى نظـــــرية

(١٢٨) اذا تناسبت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ $اد = اَبَ$ ويرسم $ده$ موازيا للقاعدة $بح$ فيكون المثلث $اده$ مشابها للمثلث $ابح$ كما تقدم (١٢٦) وتكون زاوية $ادهـ =$ زاوية $ب$ وزاوية $اهد =$ زاوية $ح$ ويحصل أيضا

$$\frac{اب}{اد} = \frac{اح}{اه} = \frac{بح}{ده} \qquad (١)$$

وحينئذ فلم يبق سوى البرهنة على تساوى المثلثين $اده$ و $اَبَحَ$

وللوصول الى ذلك يقال يؤخذ من المنطوق ان

$$\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ} = \frac{بح}{بَحَ}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب (١) مع ملاحظة أن $اد = اَبَ$ فانا نستنتج مباشرة أن $اَحَ = اه$ و $بَحَ = ده$ وبذلك يكون المثلثان المذكوران متساويين وتكون زاوية $ا = اَ$ وزاوية $اهد = ح = حَ$ وزاوية $ادهـ = ب = بَ$ وهو المراد

تنبيـــه — يجب أن يلاحظ هنا أن الزاويا المتساوية فى المثلثين المتشابهين هى المقابلة للاضلاع المتناســـبة

دعوى نظـــــرية

(١٢٩) اذا ساوت زاوية من مثلث زاوية أخرى من مثلث آخر وكان الضلعان المحيطان بزاوية المثلث الاول متناسبين للضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى يكون المثلثان متشابهين (شكل ١٢٤)

أعنى اذا كانت زاوية $ا =$ زاوية $اَ$ وكان $\frac{اب}{اَبَ} = \frac{اح}{اَحَ}$ يكون المثلثان $ابح$ و $اَبَحَ$ متشابهـــين

وللبرهنة على ذلك يؤخذ ا ء = آ بَ ويرسم ء هـ موازيا للقاعدة ب ح فيكون المثلث الحادث ا ء هـ مشابها للمثلث ا ب ح وللبرهنة على تساوى المثلثين ا ء هـ و آ بَ حَ يؤخذ من المثلثين المتشابهين ا ب ح و ا ء هـ أن اب / اء = اح / اهـ وبمقارنة هذه المتساوية بالمفروضة وهى اب / آبَ = اح / آحَ مع ملاحظة أن ا ء = آ بَ ينتج أن ا هـ = آ حَ واذن فيتساوى المثلثان المذكوران وهو المراد

تنبيه — قد ذكرنا بنمرة ١٢٤ (تعريف) ان تشابه المثلثين يقتضى توفر أربعة شروط فيهما ثم ذكرنا أن وجود اثنين منها كاف لتحقيق وجود الاثنين الآخرين وما سلكناه فى هذه النظرية وسابقتيها محقق لما ذكر وذلك لانه قد فرض فى نظرية (نمرة ١٢٧) أن ا = آ و ب = بَ وأثبتنا أن اب / آبَ = اح / آحَ = بح / بَحَ وكذا قد فرض فى نظرية (نمرة ١٢٨) أن اب / آبَ = اح / آحَ = بح / بَحَ وأثبتنا أن ا = آ و ب = بَ وفى نظرية (نمرة ١٢٩) قد فرض أن ا = آ و اب / آبَ = اح / آحَ وأثبتنا أن اب / آبَ = بح / بَحَ ، اح / آحَ = بح / بَحَ

دعوى نظرية

(١٣٠) المستقيمات الواصلة من رأس المثلث الى قاعدته تقسم هذه القاعدة وما وازاها الى أجزاء متناسبة (شكل ١٢٥)

أعنى يكون

بء / بَءَ = ءهـ / ءَهـَ = هـو / هـَوَ = وح / وَحَ

وللبرهنة على ذلك يؤخذ من المثلثات المتشابهة المتركب منها الشكل سلسلة هذه النسب المتساوية

بء / بَءَ = اء / اءَ = ءهـ / ءَهـَ = اهـ / اهـَ = هـو / هـَوَ = او / اوَ = وح / وَحَ

وبذلك تثبت النظرية

تنبيه — يشاهد مما ذكر ان النسبة الثابتة الكائنة بين الاجزاء المتناظرة من المستقيمين المتوازيين مثل ب ح و بَ حَ هى عين النسبة الكائنة بين أى قاطع وجزئه الاول

نتيجة — عكس هذه النظرية صحيح وتسهل البرهنة عليه

دعوى نظـــــــــرية

(١٣١) اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فانه يحدث

أولا — ان المثلثين الجزئيين يكونان متشابهين و يكون كل واحد منهما مشابها للمثلث الاصلى

ثانيا — ان كل ضلع من ضلعى القائمة يكون وسطا متناسبا بين الوتر بتمامه و بين مسقطه عليه

ثالثا — ان العمود يكون وسطا متناسبا بين سهمى الوتر (شكل ١٢٦)

فاذا كان ا ب ح مثلثا قائم الزاوية فى ا , ا ء هو العمود و ب ء مسقط الضلع ا ب على الوتر , ء ح مسقط الضلع ا ح عليه فانه يبرهن على الاحوال الثلاثة كما يأتى

ش ١٢٦

أولا — ان المثلثين ا ب ء , ا ب ح القائمى الزاوية فيهما زاوية ب مشتركة فيكونان متشابهين (نتيجة ٢ نمرة ١٢٧) ومثلهما المثلثان ا ء ح , ا ب ح القائما الزاوية لان فيهما زاوية ح مشتركة بينهما وحينئذ فيكون المثلثان الجزئيان ا ء ب , ا ء ح متشابهين لتساوى زواياهما المتناظرة

ثانيا — حيث ان المثلثين ا ء ب , ا ب ح متشابهان يتحصل

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ا ب}}=\frac{\text{ا ب}}{\text{ب ء}} \qquad (١)$$

وكذلك يؤخذ من المثلثين ا ء ح , ا ب ح المتشابهين هذا التناسب

$$\frac{\text{ب ح}}{\text{ا ح}}=\frac{\text{ا ح}}{\text{ء ح}} \qquad (٢)$$

ثالثا — حيث ان المثلثين الجزئيين ا ء ب , ا ء ح متشابهان يتحصل أيضا أن

$$\frac{\text{ء ب}}{\text{ا ء}}=\frac{\text{ا ء}}{\text{ء ح}}$$ وهو المراد

نتيجة ١ — اذا اعتبرنا أن الخطوط مقوّمة بأعداد فاننا نستخرج من تناسبى (١) و (٢) أن

$$\overline{\text{ا ب}}^{٢}=\text{ب ح}\times\text{ب ء} \quad , \quad \overline{\text{ا ح}}^{٢}=\text{ب ح}\times\text{ء ح}$$

وهما متساويتان تدلان على سطوح متكافئة و يتوصل منهما الى ما سبق البرهنة عليه من أن مربع أى ضلع من ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يكافئ المستطيل المجاور له الذى هو جزء من المربع المنشأ على وتر القائمة المحدد بامتداد العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على وترها نمرة ١١٥ ولو جمع هاتان المتساويتان على بعضهما لحدث

$$\overline{اب}^2 + \overline{اح}^2 = بح \left(بى + ىح \right) = \overline{بح}^2$$

ومن هذه المتساوية يعلم أنه قد توصل الى البرهنة على نظرية (فيثاغورس) بواسطة تشابه المثلثات

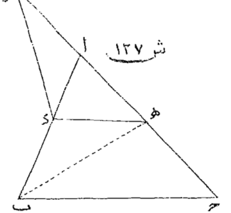
نتيجة ٢ — اذا رمز بالرموز ا و ب و ح و ع لاضلاع المثلث القائم الزاوية بح و اح و اب ولارتفاعه فانه يحدث من المثلثين المتشابهين ابح و ابى أن

$$\frac{ا}{ح} = \frac{ب}{ع} \quad \text{ومنه} \quad ا \times ع = ح \times ب$$

وهي متساوية حقيقية لدلالة كل طرف منها على ضعف مساحة المثلث القائم الزاوية

دعوى نظـــــــرية

(١٣٢) اذا اشترك مثلثان فى زاوية تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى (شكل ١٢٧) أعنى اذا اشترك المثلثان ابح و ادهـ فى زاوية ا يكون



$$\frac{ابح}{ادهـ} = \frac{اح \times اب}{اهـ \times اى}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم هـب فالمثلث اهـب متحد مع المثلث ابح فى الارتفاع فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما أعنى يكون

$$\frac{ابح}{اهـب} = \frac{اح}{اهـ}$$

وكذا حيث ان المثلثين اهـب و اهـى متحدان فى الارتفاع يحدث

$$\frac{اهـب}{اهـى} = \frac{اب}{اى}$$

وبضرب هاتين المتساويتين فى بعضهما وحذف العامل المشترك اهـب يحدث

$$\frac{ابح}{اهـى} = \frac{اح \times اب}{اهـ \times اى} \quad \text{وهو المراد}$$

* تنبيـه — اذا مد المستقيم هـا جهة ا وأخذ عليه البعد او = اهـ ووصل وى
* فالمثلث الحادث وىا يكون مكافئا للمثلث ادهـ لاتحادهما فى القاعدة والارتفاع غير أن

* فيه زاوية و ا د مكملة لزاوية هـ ا د وحينئذ اذا أبدل في المتساوية السابقة المثلث ا هـ د
* بالمثلث المكافئ له ا د و والضلع ا هـ بالضلع المساوي له ا و يحدث

$$* \quad \frac{\text{ا ب ح}}{\text{ا و د}} = \frac{\text{ا ح} \times \text{ا ب}}{\text{ا و} \times \text{ا د}}$$

* أعني أنه اذا وجد في مثلثين زاويتان متكاملتان فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل
* الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثاني

دعوى نظـــــــرية

(١٣٣) نسبة محيطي المثلثين المتشابهين الى بعضهما كالنسبة بين أي ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي أي ضلعين متناظرين فيهما أيضا (شكل ١٢٨)

برهان الاول يقال يؤخذ من تشابه المثلثين أن

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{د و}} = \frac{\text{ب ح}}{\text{هـ و}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ا ب} + \text{ا ح} + \text{ب ح}}{\text{د هـ} + \text{د و} + \text{هـ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}}$$

$$\text{أو} \quad \frac{\text{محيط المثلث ا ب ح}}{\text{محيط المثلث د هـ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}}$$

ش ١٢٨

وبرهان الثاني يقال يؤخذ أيضا من تشابه المثلثين أن

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ا ح}}{\text{د و}}$$

وحيث كانت زاوية ا = زاوية د فيحدث على مقتضى ما تقرر في النظرية السابقة أن

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{د هـ و}} = \frac{\text{ا ب} \times \text{ا ح}}{\text{د هـ} \times \text{د و}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ا ب ح}}{\text{د هـ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} \times \frac{\text{ا ح}}{\text{د و}}$$

وحيث ان $\frac{\text{ا ح}}{\text{د و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}}$ يحدث

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{د هـ و}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} \times \frac{\text{ا ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{د هـ}}^2}$$

وهو المطلوب

المبحث الثانى

فى تشابه كثيرات الاضلاع

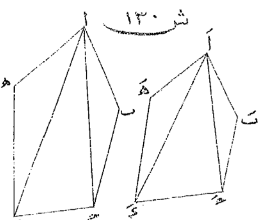
دعوى نظرية

(١٣٤) اذا علم أى شكل كثير الاضلاع فانه يمكن دائما رسم آخر بحيث يكون هو والمعلوم مركبين من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعا (شكل ١٢٩)

فاذا كان ا ب ح ء ه شكلا كثير الاضلاع معلوما ووصل من رأسه ا قطراه ا ح و ا ء ثم فرضت نقطة بَ اختيارية على الضلع ا ب ومد منها المستقيم بَ حَ موازيا الى ب ح ثم مد المستقيم حَ ءَ موازيا الى ح ء والمستقيم ءَ هَ موازيا الى ء ه فان المثلثات الحادثة ا بَ حَ و ا حَ ءَ و ا ءَ هَ تصير مشابهة بالتناظر للمثلثات ا ب ح و ا ح ء و ا ء ه واذن فالشكلان ا ب ح ء ه و ا بَ حَ ءَ هَ اللذان يمكن اعتبار وضع أحدهما بالنسبة للآخر بطريقة ما قد تركبا من مثلثات متشابهة متحدة العدد ومتماثلة فى الوضع وهو المراد

دعوى نظرية

(١٣٥) كثيرا الاضلاع المركبان من مثلثات متشابهة متحدة فى العدد ومتماثلة فى الوضع (١٣٤) هما متشابهان (شكل ١٣٠)



فاذا فرض أن المثلثات ا ب ح و ا ح ء و ا ء ه مشابهة بالتناظر للمثلثات اَ بَ حَ و اَ حَ ءَ و اَ ءَ هَ وكانت متماثلة فى الوضع يكون الشكلان ا ب ح ء ه و اَ بَ حَ ءَ هَ متشابهين أعنى أن زواياهما المتناظرة تكون متساوية وأضلاعهما المتناظرة تكون متناسبة

وللبرهنة على ذلك يقال أما تساوى الزوايا المتناظرة من الشكلين فهو نتيجة تشابه المثلثات لان منها ماهو عبارة عن زاويتين متناظرتين من مثلثين متشابهين مثل ب و بَ و ه و هَ ومنها ماهو عبارة عن مجموع زوايا متناظرة من عدة مثلثات متشابهة مثل زاوية ا و اَ

وأما تناسب الاضلاع المتناظرة فهو نتيجة تشابه المثلثات أيضا حيث يتوصل منه الى سلسلة التناسبات الآتية

$$\frac{\text{أب}}{\text{أ'ب'}}=\frac{\text{بح}}{\text{ب'ح'}}=\frac{\text{أح}}{\text{أ'ح'}}=\frac{\text{حء}}{\text{ح'ء'}}=\frac{\text{أء}}{\text{أ'ء'}}=\frac{\text{ءهـ}}{\text{ء'هـ'}}=\frac{\text{أهـ}}{\text{أ'هـ'}}$$

تنبيه — يؤخذ من سلسلة التناسبات هذه أن النسبة بين أى قطرين متناظرين مساوية للنسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين من كثيرى الاضلاع

نتيجة — اذا دل ن على عدد أضلاع كل واحد من الشكلين المفروضين فان عدد المثلثات المتركب منها كل واحد منهما يكون مساويا ضرورة الى (ن — ٢) وحيث ان تشابه أى مثلثين متناظرين منهما يحتاج الى شرطين فيكون عدد الشروط اللازمة لتشابه كثيرى الاضلاع مساويا ضرورة الى ٢ (ن—٢) = ٢ ن — ٤ وهو موافق لما سبق التنويه عنه (بنمرة ١٢٤ تعريف)

دعوى نظـــــــرية

(١٣٦) وبالعكس كثيرا الاضلاع المتشابهان يتركبان من مثلثات متشابهة متحدة فى العدد ومتماثلة فى الوضع (شكل ١٣١)

وللبرهنة على ذلك عد من نقطة أ احدى رؤس الشكل أب ح ء هـ قطراه أء و أح ثم عد أيضا من نقطة و احدى رؤس الشكل و ح ط ى ك المناظرة للرأس أ قطراه و ى و و ط ثم يقال حيث ان الشكلين المفروضين متشابهان تكون زاوية أ ب ح مساوية لنظيرتها و ع ط ويكون الضلعان أ ب و ب ح مناسبين للضلعين و ع و ع ط أعنى أن

$$\frac{\text{أب}}{\text{وع}}=\frac{\text{بح}}{\text{عط}}$$

وحينئذ يكون المثلثان أ ب ح و و ع ط متشابهين (١٣٢) لاشتراكهما فى زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة و ينتج من تشابههما أن زاوية ب ح ا = زاوية ع ط و

ثم اذا طرحنا هاتان الزاويتان المتساويتان من الزاويتين المتساويتين ب ح ء و ع ط ى كان الزاويتان الباقيتان أ ح ء و و ط ى متساويتين ضرورة لكنه حيث كان المثلثان أ ب ح و و ع ط متشابهين يحدث $\frac{\text{أح}}{\text{وط}}=\frac{\text{بح}}{\text{عط}}$

وكذا يؤخذ من تشابه كثيرى الاضلاع أن

$$\frac{\text{بح}}{\text{حط}} = \frac{\text{حد}}{\text{طى}} \quad \text{واذن يكون} \quad \frac{\text{اح}}{\text{وط}} = \frac{\text{حد}}{\text{طى}}$$

وحيث انه قد سبق البرهنة على أن زاوية احد = زاوية و ط ى يكون المثلثان احد , و ط ى متشابهين لاشتراكهما فى زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة

وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقى المثلثات مهما كان عدد أضلاع الشكلين المفروضين وبذلك يثبت المطلوب

دعوى نظـــــــرية

(١٣٧) النسبة بين محيطى أى شكلين متشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى الضلعين المذكورين (شكل ١٢٩)

برهان الاول ـ يقال حيث كان الشكلان متشابهين يحدث

$$\frac{\text{اب}}{\text{ا}'\text{ب}'} = \frac{\text{بح}}{\text{ب}'\text{ح}'} = \frac{\text{حد}}{\text{ح}'\text{د}'} = \frac{\text{ده}}{\text{د}'\text{ه}'} = \frac{\text{ها}}{\text{ه}'\text{ا}'}$$

ومن سلسلة هذه التناسبات يؤخذ أن

$$\frac{\text{اب} + \text{بح} + \text{حد} + \text{ده} + \text{ها}}{\text{ا}'\text{ب}' + \text{ب}'\text{ح}' + \text{ح}'\text{د}' + \text{د}'\text{ه}' + \text{ه}'\text{ا}'} = \frac{\text{اب}}{\text{ا}'\text{ب}'} \quad \text{أو}$$

$$\frac{\text{محيط ابحده}}{\text{محيط ا}'\text{ب}'\text{ح}'\text{د}'\text{ه}'} = \frac{\text{اب}}{\text{ا}'\text{ب}'} \quad \text{وهو المطلوب}$$

وبرهان الثانى ـ يقال حيث كان المثلثان ابح و ا َب َح َ متشابهين يحدث (١٢٣)

$$\frac{\text{ابح}}{\text{ا}'\text{ب}'\text{ح}'} = \frac{\overline{\text{اح}}^2}{\overline{\text{ا}'\text{ح}'}^2} \quad \text{وكذا حيث كان المثلثان احد و ا َح َد َ متشابهين يكون}$$

$$\frac{\text{احد}}{\text{ا}'\text{ح}'\text{د}'} = \frac{\overline{\text{اح}}^2}{\overline{\text{ا}'\text{ح}'}^2}$$

ومن هذين التناسبين يؤخذ أن

$$\frac{\text{ابح}}{\text{ا}'\text{ب}'\text{ح}'} = \frac{\text{احد}}{\text{ا}'\text{ح}'\text{د}'}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن $\frac{\text{ا ح د}}{\text{ا' ح' د'}} = \frac{\text{ا د هـ}}{\text{ا' د' هـ'}}$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ا ب ح}}{\text{ا' ب' ح'}} = \frac{\text{ا ح د}}{\text{ا' ح' د'}} = \frac{\text{ا د هـ}}{\text{ا' د' هـ'}} \ \text{أو}\ \frac{\text{ا ب ح} + \text{ا ح د} + \text{ا د هـ}}{\text{ا' ب' ح'} + \text{ا' ح' د'} + \text{ا' د' هـ'}} = \frac{\text{ا ب ح}}{\text{ا' ب' ح'}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ا' ب'}}^2}$$

أو $\frac{\text{سطح ا ب ح د هـ}}{\text{سطح ا' ب' ح' د' هـ'}} = \frac{\overline{\text{ا ب}}^2}{\overline{\text{ا' ب'}}^2}$ وهو المطلوب

الفصـــــل الرابـــع

فى أوتار الدائرة وقواطعها

دعوى نظـــــرية

(١٣٨) اذا تقاطع وتران داخل دائرة فان حاصل ضرب جزأى أحدهما مساو لحاصل ضرب جزأى الثانى (شكل ١٣٢) فاذا تقاطع الوتران ا ب و ح د فى نقطة و يجب أن يكون

$$\text{ا و} \times \text{و ب} = \text{و ح} \times \text{و د}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان ح ا و ب د فالمثلثان الحادثان ا و ح و ب و د يكونان متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما حيث ان زاوية د و ب = زاوية ح و ا لتقابلهما بالرؤس وان زاوية د = زاوية ا لاتحادهما فى المعيار وهو $\frac{\text{ب ح}}{2}$ واذن فتكون أضلاعهما متناسبة ويحدث

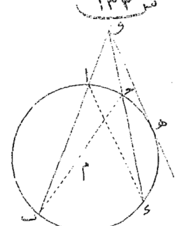
$\frac{\text{ا و}}{\text{و د}} = \frac{\text{و ح}}{\text{و ب}}$ ومنه ا و $\times$ و ب = و د $\times$ و ح وهو المطلوب

* (١٣٩) فائدة ـ حاصل الضرب ا و $\times$ و ب الذى لا يتغير مهما تغير وضع الوتر ا ب لا يرتبط
* الا بوضع النقطة و فاذا رمز بحرف د لبعد نقطة و عن مركز الدائرة وبالرمز س لنصف
* قطر الدائرة ومد من نقطة و قطر حدث ضرورة ا و $\times$ و ب = (س + د) (س ـ د)
* = $\text{س}^2 - \text{د}^2$ ويسمى المقدار ($\text{س}^2 - \text{د}^2$) بقوة نقطة و

دعوى نظـــــــرية

(١٤٠) اذا مد من نقطـة خارج دائرة قاطعان لهـا فان حاصـل ضرب أحد القاطعين بتمـامه في جزئه الخارج يكون مساويا للحاصل ضرب القاطع الثاني بتمـامه في جزئه الخارج (شـكل ١٣٣)

أعني ان $و ب \times و ا = و د \times و ح$



وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان ح ب و ا د فالمثلثان الحادثان و ب ح و و ا د فيهـما زاوية و مشتركة وزاوية ب = زاوية د لاتحادهما في المعيار فيكونان متشابهين و يحدث

$\frac{و ب}{و د} = \frac{و ح}{و ا}$ أو $و ب \times و ا = و د \times و ح$

وهو المطلوب

* نتيجـــة ـ اذا رمز بحرف د لبعد نقطة و عن المركز وبالرمز نق لنصف قطر الدائرة
* ثم وصـل بين نقطة و والمركز بمستقيم ومد على اسـتقامته فانه يشاهد أن حاصـل الضرب
* الثابت $و ب \times و ا$ مساو الى $(د + نق)(د - نق) = د^2 - نق^2$ وتسمى هذه الكمية
* بقوة نقطة و

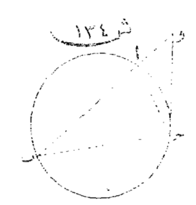
تنبيـــه ـ اذا تصورنا تحرك القاطع و د حول نقطة و شيأ فشيأ بحيث تقرب النقطتان ح و د من بعضهما فانه عندما يتحد النقطتان المذكورتان يأخذ المستقيم و د الوضع و هـ ويكون مماسا لمحيط الدائرة ويؤل كل واحد من البعدين و د و و ح الى البعد و هـ ويكون بناء على ذلك

$$\overline{و هـ}^2 = و ب \times و ا \quad أو \quad \frac{و ب}{و هـ} = \frac{و هـ}{و ا}$$

أعني أن المماس يكون وسطا متناسبا بين القاطع بتمامه و جزئه الخارج ومع ذلك فانه يمكن البرهنة على هذه النظرية مباشرة

دعوى نظـــــــرية

(١٤١) اذا مد من نقطة خارج محيط دائرة قاطع لها ومماس فان المماس يكون وسطا متناسـبا بين القطع بتمامه وجزئه الخارج (شكل ١٣٤) أعني أن $\frac{و ب}{و ح} = \frac{و ح}{و ا}$



وللبرهنة على ذلك نصل المستقيمين أ حـ و حـ ب فالمثلثان الحادثان و حـ ب و و حـ أ فيهما زاوية و مشتركة وزاوية ب = زاوية و حـ أ لاتحادهما فى المعيار $\frac{أحـ}{٢}$ فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{و ب}{و حـ} = \frac{و حـ}{و أ} \quad \text{ومنه} \quad \overline{و حـ}^{٢} = و ب \times و أ$$

وهو المراد

* نتيجـــة — ينتج مما ذكر ان مربع المماس يدل على مقدار قوة نقطة و وهو ($ء^٢ - س^٢$)
* ومع ذلك فانه يسهل معرفة ذلك مباشرة اذا لوحظ ان الابعاد ء و س و و حـ يتركب منها
* مثلث قائم الزاوية فى حـ ووتره ء

* (١٤٢) ويمكن تلخيص جميع ما ذكر بخصوص قوة أى نقطة بالنسبة لدائرة فيقال
* ان المقدار $ء^٢ - س^٢$ يمكن جعله قانونا عاما لبيان قوة أى نقطة مهما كان وضعها وذلك لانه
* اذا جعل ع رمزا لهذا القانون يحدث ع = $ء^٢ - س^٢$
* فكل نقطة مفروضة خارج الدائرة يكون فيها ء < س ويكون حينئذ ع > ٠ أى موجبا
* وكل نقطة مفروضة على محيط الدائرة يكون فيها ء = س ويكون حينئذ ع = ٠
* وكل نقطة مفروضة داخل الدائرة يكون فيها ء < س ويكون حينئذ ع > ٠ أى سالبا

الفصـــــــل الخـامس

فى نظريات مهـــمة تتعلق بالمثلثات وبالاشـــكال الرباعيـــة التى يمكن رسمها داخـل الدائرة

دعوى نظـــــــرية

* (١٤٣) اذا نصفت احدى زوايا مثلث أو المكملة لها بمســتقيم فان مســتطيل الضلعين
* المحيطين بها يساوى فى الحالة الاولى مستطيل قسمى القاعدة زائدا مربع المســتقيم المنصف
* وفى الثـانية مستطيل بعدى نقطة تقابل المســتقيم المنصف بامتداد القاعدة عن نهايتيها ناقصا
* مربع المستقيم المنصف (شكل ١٣٥)

* ليكن اد منصف الزاوية ب ا ح ، اد َ منصف الزاوية ح ا د َ فيكون
* فى الحالة الاولى ا ب × ا ح = ح د × د ب + اد‾²
* وفى الحالة الثانية ا ب × ا ح = ح د َ × د َ ب ــ اد َ‾²
* وللبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة على المثلث
* ثم يمد المستقيم المنصف ا د على استقامته
* حتى يقابل المحيط فى نقطة ع وسط القوس
* ح ع ب ويمد أيضا المستقيم المنصف ا د َ
* على استقامته جهة ا حتى يقابل المحيط
* فى نقطة ع َ وسط القوس ح ا ع َ ب ويوصل
* المستقيمان ع ب و ع َ ب ثم يقال

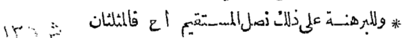
شكل ١٣٥

* أولا ــ ان المثلثين ا ح د و ا ب ع فيهما زاوية ح ا د = زاوية ع ا ب بالتنصيف
* وزاوية ا ح د = زاوية ع لانهما مرسومتان فى قطعة واحدة واذن تكون الزاوية
* ا د ح = الزاوية ا ب ع ويكون المثلثان متشابهين ويحدث
* $\frac{اح}{اع} = \frac{اد}{اب}$ أو اح × اب = اد × اع = اد (اد + د ع) = اد‾² + اد × د ع
* غير أن اد × د ع = ح د × د ب (١٣٨) فيكون اح × اب = ح د × د ب + اد‾²
* ثانيا ــ ان المثلثين اد َ ح و اب ع َ فيهما زاوية د َ ا ح = زاوية د َ ا د َ = ع َ ا ب
* وزاوية د َ ح ا = زاوية ب ع َ ا لانهما مكملتان لزاوية ا ح ب وحينئذ يكونان
* متشابهين ويحدث
* $\frac{اح}{اع َ} = \frac{اد َ}{اب}$ أو اح × اب = اد َ × اع َ = اد َ (د َ ع َ ــ اد َ) = اد َ × د َ ع َ ــ اد َ‾²
* غير أن اد َ × د َ ع َ = د َ ح × د َ ب (١٤٠) فيكون اح × اب = د َ ح × د َ ب ــ اد َ‾²
* وهو المراد

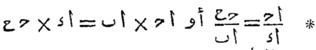
* تنبيه ــ يتوصل بهذه النظرية الى معرفة مقادير أطوال المستقيمات المنصفة لزوايا المثلث
* اذا علمت أضلاعه حيث انه يسهل حساب مقادير أطوال أجزاء القاعدة د ب و د ح أو
* د َ ب و د َ ح اذا علمت الاضلاع الثلاثة

دعوى نظـــــــرية

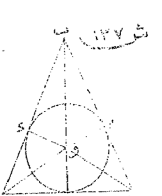
* (١٤٤) مستطيل أى ضلعين من أى مثلث يساوى المستطيل المتكون من ارتفاع المثلث
* المقابل للضلع الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة عليه (شكل ١٣٦)
* ليكن اب ح المثلث المعلوم و اد العمود المقابل للضلع الثالث ب ح و ح ع قطر
* الدائرة المرسومة على المثلث فيكون اب × اح = اد × ح ع



* وللبرهنة على ذلك نصل المستقيم اع فالمثلثان
* اح ع و ادب القائما الزاوية فيهما زاوية اع ح
* تساوى زاوية اب د لاتحادهما فى المعيار $\frac{\text{اح}}{٢}$
* واذن يكونان متشابهين ويحدث



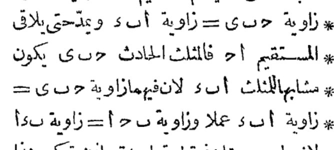
* $\frac{\text{اح}}{\text{اد}} = \frac{\text{حع}}{\text{اب}}$ أو اح × اب = اد × ح ع
* وهو المطلوب
* نتيجة ـ اذا ضرب طرفا المتساوية الاخيرة فى طول الضلع الثالث ب ح يحدث
* اح × اب × ب ح = ح ع × اد × ب ح
* غير أن الحاصل اد × ب ح يدل على ضعف مساحة المثلث فاذا جعل م رمز المساحة
* المثلث و س رمز النصف قطر الدائرة حدث
* اح × اب × ب ح = ٢م × ٢س = م × ٤س
* أعنى أن حاصل ضرب أضلاع المثلث الثلاثة مساو لمساحته مضروبة فى أربعة أمثال نصف
* قطر الدائرة المرسومة عليه
* تنبيـــه ـ ويمكن البرهنة على أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب محيطه مضروبا فى
* نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٣٧)



* وذلك لان مجموع المثلثات ب و ح و ح و ا و ا و ب المتحدة
* فى الارتفاع مساو للمثلث الكلى اب ح وحيث ان مساحة
* كل واحد منها مساو لحاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه
* فتكون مساحة المثلث الكلى مساوية لحاصل ضرب نصف
* الارتفاع المشترك أو نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فى
* مجموع قواعد المثلثات المتركب منها أو فى محيطه ويثبت المطلوب

* دعوى نظـــــــــرية

* (١٤٥) فى كل شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة مستطيل قطريه يساوى مجموع
* المستطيلين المتكونين كل واحد منهما من ضلعين متقابلين منه (نظرية بطليموس) (شكل ١٣٨)
* وللبرهنة على ذلك يرسم المستقيم ب ى بحيث تكون
* زاوية ح ب ى = زاوية ا ب د ويمد حتى يلاقى
* المستقيم ا ح فالمثلث الحادث ح ب ى يكون
* مشابها للمثلث ا ب د لان فيهما زاوية ح ب ى =
* زاوية ا ب د عملا وزاوية ب ح ا = زاوية ب د ا
* لانهما مرسومتان فى قطعة واحدة واذن يتركب هذا
* التناسب



* ب ح / ب د = ح ى / ا د ومنه ب ح × ا د = ب د × ح ى

* ثم يقال ان المثلثين ا ب ى و ب د ح متشابهان لان فيهما زاوية ا ب ى = زاوية د ب ح
* وذلك لان زاوية ا ب د = زاوية ى ب ح كما تقدم فاذا ضم لكل واحد منهما الزاوية د ب ى
* كان المجموعان ا ب ى و د ب ح متساويين وفيهما أيضا زاوية ب ا ى = زاوية ب د ح
* لكونهما مرسومتين فى قطعة واحدة واذن يتركب هذا التناسب

* ا ب / ب د = ا ى / د ح ومنه ا ب × ح د = ا ى × ب د

* وبجمع هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

* ا ب × ح د + ب ح × ا د = ب د (ا ى + ح ى) = ب د × ا ح

* وهو المطلوب

---

* دعوى نظـــــــــرية

* (١٤٦) فى كل شكل رباعى لا يمكن رسمه داخل الدائرة مستطيل قطريه أقل من مجموع
* مستطيلى اضلاعه المتقابلة (شكل ١٣٩) أعنى أن فى الشكل الرباعى ا ب ح د الذى
* تمر محيط الدائرة بثلاثة من رؤسه فقط دون الرابعة

* ا ح × ب د < ا ب × ح د + ا د × ب ح

* وللبرهنــة على ذلك نصنع زاوية اب ى = زاوية د ب ح وزاوية ب ا ى = زاوية
* ب د ح فالمستقيم ا ى لايمكن أن يتحد مع ا ح لان
* نقطة د ليست موجودة على المحيط وأن زاوية ب د ح
* مغايرة لزاوية ب ا ح ثم يوصل بعد ذلك المستقيم ى ح
* فالمثلثان ا ب ى و ب د ح فيهما الزوايا المتناظرة
* متساوية عملا فيكونان متشابهين ويحدث

ش ١٣٩

* اب / ب د = اى / ح د ومنه اى × ب د = اب × ح د
* وأما المثلثان ب ى ح و اب د فان فيهما زاوية ى ب ح = زاوية اب د وذلك
* لان زاوية د ب ح = زاوية اب ى عملا فاذا طرح من كل واحدة منهما الزاوية ى ب د
* يكون الباقيان ح ب ى و د ب ا متساويين ولمناسبة تشابه المثلثين اب ى و ب د ح
* يحدث

* اب / ب د = ب ى / ب ح

* واذن يوجد فى المثلثين المذكورين زاوية مشتركة محاطة باضلاع متناسبة فيكونان
* متشابهين ويحدث

* اد / ح ى = ب د / ب ح ومنه ب د × ح ى = ا د × ب ح
* وبضم هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

* ب د (ح ى + ا ى) = اب × ح د + ا د × ب ح
* وحيث كان ح ى + ا ى > ا ح يكون ب د × ا ح < اب × ح د + ا د × ب ح
* وهو المراد

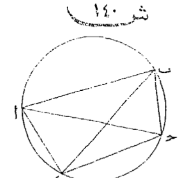
* تنبيــه ـ يستنتج من هذه النظرية ان كل شكل رباعى وجد فيه مستطيل قطريه مساو
* لمجموع مستطيلى أضلاعه المتقابلة فانه يمكن رسمه داخل الدائرة والافلا

---

* دعوى نظـــرية

* (١٤٧) فى كل شكل رباعى يمكن رسمه داخل الدائرة نسبة أحد قطريه الى قطره الثانى كنسبة
* مستطيل الضلعين المنتهيين باحدى طرفى القطر الاول زائدا مستطيل الضلعين المنتهيين

* بطرفه الثانى الى مستطيل الضلعين المنتهيين بأحد طرفى القطر الثانى زائدا مستطيل الضلعين
* المنتهيين بطرفه الثانى (شكل ١٤٠)



* أعنى أن اح / بد = (اب × اد + بح × حد) / (اب × بح + اد × دح)
* والبرهنة على ذلك يقال انه نظرا لانقسام الشكل الرباعى
* ابحد الى المثلثين ابح و احد يحدث بناء على
* ماتقدم (١٤٤ نتيجة) أن

* اب × بح × اح = ابح × ٤س و

* اد × دح × اح = ادح × ٤س

* وبضمهما الى بعضهما يحدث

* اح (اب × بح + اد × دح) = ٤س (ابح + ادح) = ٤س ابحد (١)

* ونظرا لانقسام الشكل الرباعى المذكور الى المثلثين ابد و بدح يحدث أيضا

* اد × اب × بد = ابد × ٤س و

* بح × حد × بد = بحد × ٤س

* وبالجمع يحدث

* بد (اد × اب + بح × حد) = ٤س (ابد + بحد) = ٤س ابحد (٢)

* وبمقارنة المتساوية (١) بالمتساوية (٢) يحدث

* اح (اب × بح + اد × دح) = بد (اد × اب + بح × حد) أو

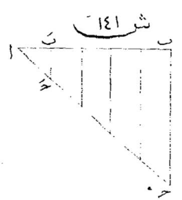
* اح / بد = (اب × اد + بح × حد) / (اب × بح + اد × دح) وهو المراد

الفصـــــــــــل السادس

فى الدعاوى العمليـة الاساسـية

دعوى عمليـــــــــة

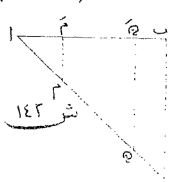
(١٤٨) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء متساوية (شكل ١٤١) فاذا أريد تقسيم المستقيم المعلوم ا ب الى خمسة أجزاء متساوية مثلا يقال انا لو تذكرنا ماتقرر بالنتيجـة الثانيـة من نمرة (١٢١) لعلمنا الحل مباشرة فيؤخذ على مستقيم ما اح خارج من نقطة ا خمسة أبعاد مساوية للبعد الاختيارى اح َ ثم يوصل المستقيم حب ويمر من نقط تقاسيم اح مستقيمات موازية ب ح فينقسم بذلك المستقيم ا ب الى خمسة أقسام متساوية



تنبيــه — وكان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية نمرة (١٣٠)

دعوى عمليـــــــــة

(١٤٩) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء مناسبـة لخطوط معلومة (شكل ١٤٢) فاذا أريد تقسيم المستقيم ا ب الى ثلاثة أجزاء مناسبة لثلاثة خطوط مستقيمة معلومة ام و م ن و ن ح عـد من نقطة ا مسـتقيم كيفما اتفق اح وتؤخذ عليه المستقيمات الثلاثة المعلومة أحدها بجانب الآخر ثم يوصل نهاية المستقيم الحاصل من ذلك وهى ح بنقطة ب ويرسم من نقطتى م و ن مستقيمان يوازيان حب فينقسم بذلك المستقيم ا ب الى أجزاء مناسبة للمستقيمات المعلومة (١٢١)



تنبيــه ١ — ومع ذلك فانه كان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية نمرة (١٣٠)

تنبيــه ٢ — اذا أريد تعيين نقطتين على المستقيم الواصل بين ا و ب بحيث يكون البعدان الواصلان من كل واحدة منهما الى النقطتين ا و ب مناسبين لمستقيمين معلومين م و ن يقال (شكل ١٤٣)

اما تعيين نقطة مثل نقطة ى بين ا و ب موفية للشرط المطلوب فهذا يمكن اجراؤه كما ذكر فى هذه النظرية وأما اذا أريد تعيين نقطة على امتداد المستقيم اب موفية لهذا الشرط فان هذا يقتضى أن يؤخذ البعد اح مساويا م مثلا ثم يؤخذ البعد حء مساويا ن ثم يوصل ءب ويرسم من نقطة ح المستقيم حىَ موازيا ءب فتكون ىَ هى النقطة المطلوبة لانه يحدث

$\frac{اح}{اىَ} = \frac{حء}{بىَ}$ وهو المراد

دعوى عمليـــــــة

(١٥٠) المطلوب ايجاد الرابع المتناسب لثلاثة خطوط معلومة (شكل ١٤٤)

اذا كانت الخطوط الثلاثة المعلومة هى ا و ب و ح فان ما تقرر فى النتيجة الثانية من (نمرة ١٢١) كاف لمعرفة طريقة حل هذه المسئلة فترسم زاوية كيفما اتفق س و ص ويؤخذ فى جهتى نقطة و بعدان مساويان للطولين المركبين للنسبة الاولى وهما وا = ا و وب = ب ثم يوصل المستقيم اب ويؤخذ على الضلع وس البعد وح مساويا للطول الثالث المعلوم ح فاذا رسم حء موازيا اب فان البعد وء يكون هو الرابع المتناسب المطلوب لانه يحدث $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{س}$

ومع ذلك فانه كان يمكن حل هذه المسئلة بواسطة ما تقرر بنمرة (١٣٠) وعلى العموم جميع النظريات التى يوجد بها أربعة خطوط متناسبة أو التى يكون فيها مستطيل خطين مساويا لمستطيل خطين آخرين يمكن استعمالها لحل مسئلة ايجاد الرابع المتناسب

نتيجة - ليكن المطلوب ايجاد طول المستقيم س بحيث يكون س = $\frac{ب ح}{ا}$ وبعبارة أخرى المطلوب ايجاد ارتفاع مستطيل قاعدته ا يكون مكافئا لمستطيل آخر بعداه معلومان ب و ح فان المسئلة تؤل الى ايجاد الرابع المتناسب للخطوط الثلاثة (بحسب ترتيب الخطوط) ا و ب و ح لانه يتحصل هذا التناسب $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{س}$ ومنه س = $\frac{ب ح}{ا}$

تنبيه - اذا كان ب = ح فان الخط س يسمى بالثالث المتناسب بين الخطين ا و ب ويكون س = $\frac{ب^2}{ا}$

دعوى عمليـــــــة

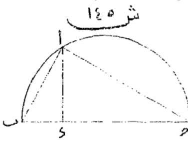
(١٥١) طريقة ايجاد الوسط المتناسب بين مستقيمين معلومين

اذا كان المستقيمـان المعلومان هما ا و ب والوسط المتناسب هو س لزم ان يكون

$$\frac{ا}{س} = \frac{س}{ب} \text{ أو } س^٢ = ا \times ب$$

وحل هذه المسئلة يقال

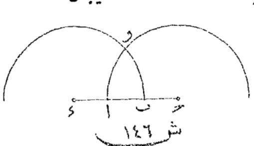
أولا ــ ان خاصية العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره يتوصل بها الى حل هـذه المسـئلة ولذلك يرسم المستقيم ب ح (شكل ١٤٥) مساويا لمجموع الخطين المعلومين أحدهما من ب الى د والثاني من د الى ح ثم يرسم على المستقيم ب ح نصف دائرة ويقام من نقطة د العمود د ا فيكون هو مقدار س المطلوب



ثانيا ــ من المعـلوم ان أى ضلع من ضلعى القائمة من المثلث القـائم الزاوية وسـط متناسب بين الوتر بتمـامه وبين مسقط الضلع المذكور عليــه وحينئذ فيمكن أن يستخرج من هذه الخاصـية حل للمسئلة أنسب من الحل السابق فيمـا اذا كان ا و ب كبيرين

ثالثا ــ من المعـلوم ان ممـاس الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بتمـامه وجزئه الخارج وحينئذ فيمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة التى نحن بصددها

رابعا ــ اذا كان ا ب = ب (شكل ١٤٦) و ا ح = ب د = ا فانه يجعل النقطتان د و ح مركزين ويرسم محيطا دائرتين بنصف قطر واحد مساو ا فيتقاطع المحيطان فى نقطة و ويكون أحد البعدين و ب أو و ا هو الوسط المتناسب المطلوب



وذلك لانه يحدث (١١٧) أن

$$\overline{و ب}^٢ = \overline{و د}^٢ + \overline{ب د}^٢ - ٢ و د (ب د - \frac{ا ب}{٢}) \text{ أو}$$

$$\overline{و ب}^٢ = ٢ \overline{و د}^٢ - ٢ و د (و د - \frac{ا ب}{٢}) \text{ أو}$$

$$\overline{و ب}^٢ = ٢ ا^٢ - ٢ ا (ا - \frac{ب}{٢}) = ا \times ب$$

وهى طريقة بسيطة لا تحتاج الا لاستعمال البرجل فقط بعد رسم المستقيم د ح

نتيجة ١ - يؤخذ من المقدار $س^٢ = ا × ب$ ان طريقة ايجاد الوسط المتناسب الهندسى يتوصل بها الى حل المسئلة الآتية وهى

طريقة انشاء مربع يكافئ اما مستطيلا أو متوازى أضلاع أو مثلثا أو شبه منحرف معلوما

نتيجة ٢ - ويعلم من طريقة ايجاد الوسط المتناسب الهندسى أن الوسط المتناسب الهندسى $\sqrt{ا × ب}$ بين العددين ا و ب هو أقل من الوسط المتناسب العددى $\frac{ا + ب}{٢}$ بين العددين المذكورين

دعوى عمليـــــــة

(١٥٢) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعا معلوما بحيث يكون مجموع ضلعى المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٧)

من المعلوم انه اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فان هـذا العمود يقسم الوتر الى جزأين يكون مستطيلهما مساويا لمربع العمود

وحينئذ فيؤخذ المستقيم الاختيارى اب المساوى لمجموع البعدين المعلوم ويرسم عليه نصف محيط دائرة ثم يقام من نقطة ا العمود اح على القطر ويؤخذ عليه البعد اح مساويا لضلع المربع المعلوم ويمد من نقطة ح المستقيم حمد موازيا اب فاذا أنزل من نقطة م العمود مة على اب فالمستقيمان اة و ةب يكونان هما بعدى المستطيل المطلوب

* نتيجـــة - اذا أريد ايجاد جذرى المعادلة $س^٢ - ا س + ك^٢ = ٠$ يجب البحث

* عن الخطين $سَ$ و $سً$ الموفيين للشرطين الآتيين

* $سَ + سً = ا$ و $سَ سً = ك^٢$

* وحينئذ فيؤل الامر الى المسئلة المتقدمة

* وأما جذرا المعادلة $س^٢ + ا س + ك^٢ = ٠$ فهما مساويان فى المقـدار المطلق لجذرى

* المعادلة السابقة ولذا يبحث عنهما بعين الطريقة السابقة

تنبيه - يجب لان تكون المسئلة ممكنة ان لا يتجاوز البعد اح نصف القطر او أعنى ان لا يتجاوز ضلع المربع المعلوم نصف المستقيم اب

وحينئذ فيكون أكبر المسـتطيلات الممكنة التى يكون مجموع ضلعيها المتجاورين مساويا للمستقيم المعلوم اب هو المربع المرسوم على نصف المستقيم المذكور

دعوى عمليـــــــة

(١٥٣) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعاً معلوما بحيث يكون الفرق بين ضلعي المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٨)

لحل هذه المسئلة يقال انا لو تذكرنا ان مماس محيط الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بتمامه وبين جزئه الخارج أعني ان المستطيل الذي بعداه القاطع بتمامه وجزؤه الخارج يكافئ المربع المنشأ على المماس وان الفرق بين القاطع بتمامه وبين جزئه الخارج هو قطر الدائرة لظهر لنا طريقة لحل هذه المسئلة التي نحن بصددها بواسطة ان يرسم على المستقيم المعلوم اب دائرة باعتباره قطرا لها ويقام من نقطة ا العمود اح على هذا القطر ويؤخذ منه البعد اح مساويا الضلع المربع المعلوم ثم يوصل القاطع حه مارا بالمركز فيكون بعدا المستطيل المطلوب هما حه و حد

* نتيجـــة ـ اذا أريد ايجاد جذري احدى المعادلتين

* $س^٢ - اس - ن^٢ = ٠$ ، و $س^٢ + اس - ن^٢ = ٠$

* وجعل $سَ$ و $سً$ رمزين للقدارين المطلقين لهذين الجذرين وفرض أن $سَ$ هو
* الجذر الاكبر وجب ايجاد الخطين اللذين يكونان بحيث ان $سَ - سً = ا$ و $سَ سً = ن^٢$
* وحينئذ فيرجع الامر الى المسئلة المتقدمة

دعوى عمليـــــــة

(١٥٤) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى قسمة ذات وسط وطرفين وبعبارة أخرى المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى قسمين مختلفين بحيث يكون الاكبر وسطا متناسبا بين المستقيم الكامل وجزئه الاصغر (شكل ١٤٩)

أعني اذا علم مستقيم مثل اب وكان المطلوب ايجاد نقطة عليه مثل نقطة م بحيث يكون بعدها عن نقطة ب وسطا متناسبا بين المستقيم الكلي اب وبين بعدها عن نقطة ا يقال نفرض ان المسئلة محلولة فيحدث على مقتضى المنطوق ان

$$\frac{اب}{مب} = \frac{مب}{ام} \quad \text{أو} \quad \frac{اب}{مب} = \frac{اب + مب}{اب} \quad \text{أو}$$

$$مب\,(اب + مب) = \overline{اب}^٢$$

وحينئذ فيتوصل الى المقدار م ب بواسطة انشاء مستطيل يكافئ المربع $\overline{اب}^2$ بحيث يكون الفرق بين ضلعيه المتجاورين مساويا اب وأن أصغر البعدين يدل ضرورة على م ب فاذا رجعنا الى العملية السابقة أمكن استنتاج طريقة العمل الآتية

شكل ١٤٩

يقام من نقطة ا نهاية المستقيم اب عمود مساو لنصف اب ثم يرسم محيط دائرة بنصف القطر اح ويوصل نقطة ب بالمركز فالجزء الخارج ب د من القاطع يدل على البعد المطلوب م ب وهو الجزء الاكبر من المستقيم اب المنقسم الى قسمة ذات وسط وطرفين

* نتيجة ١ — يمكن تعميم منطوق المسئلة التي نحن بصددها فيقال
* المطلوب تعيين النقط الموجودة على المستقيم اب أو على امتداده الموفية لهذا الشرط وهو
* أن البعد الواصل من أيها الى نقطة ب يكون وسطا متناسبا بين البعد اب وبين بعدها
* عن نقطة ا

* يسهل مشاهدة أنه لا يوجد من هذه النقط الا اثنتان فقط وذلك لانه
* أولا — اذا انتقلت نقطة م متحركة من نقطة ب الى نقطة ا فان النسبة $\frac{اب}{مب}$ تبتدئ
* من اللانهاية له عندما تكون نقطة م منطبقة على نقطة ب وتنتهي بالوحدة عندما تكون
* نقطة م منطبقة على نقطة ا
* وأما النسبة $\frac{مب}{ما}$ فانها تبتدئ بالصفر وتنتهي باللانهاية له وحيث ان الكسر الاول كان أولا
* أكبر من الكسر الثاني ثم صار أصغر منه فينتج من ذلك لزوم وجود نقطة مثل م بين ا و ب
* تكون فيها تان النسبتان متساويتين وهذه هي النقطة التي سبق التكلم عليها

* ثانيا — اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد اب جهة ب فان النسبة $\frac{اب}{مب}$
* تبتدئ أولا باللانهاية له عندما تكون نقطة م منطبقة على نقطة ب وتنتهي بالصفر عند
* ماتكون نقطة م على بعد لانهائي من نقطة ب وأما النسبة $\frac{مب}{ما}$ فانها تبتدئ بالصفر وتنتهي
* بالوحدة (لان البسط والمقام يصيران لانهائيين) وحيث أن الكسر الاول كان أولا أكبر
* من الثاني ثم صار أصغر منه فيستدل ذلك على لزوم وجود نقطة على امتداد اب وعلى شمال
* نقطة ب مثل نقطة م َ تكون فيها النسبتان المذكورتان متساويتين بحيث يكون

$$* \quad \frac{مَب}{مَا} = \frac{اب}{مَب} = \frac{مَب - اب}{اب} \quad \text{أو} \quad مَب\,(مَب - اب) = \overline{اب}^2$$

* ومن ذلك يشاهد أن هذه النقطة تعين أيضا بواسطة رسم مستطيل يكافئ المربع $\overline{\text{اب}}^{2}$
* ويكون الفرق بين ضلعيه المتجاورين مساويا اب غير أن البعد الاكبر هنا هو مَب وحينئذ
* يكفي للوصول الى هذا الحل الثاني أن يؤخذ القاطع بتمامه ب ءَ على امتداد المستقيم اب
* ثالثا — اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد المستقيم با جهة ا فان النسبة $\frac{\text{اب}}{\text{مب}}$
* تبتدئ أولا بالوحدة عندما تكون نقطة م منطبقة على نقطة ا ثم تنتهي بالصفر عندما تكون
* نقطة م على بعد لانهائي من نقطة ا وأما النسبة الثانية $\frac{\text{مب}}{\text{ما}}$ فانها تبتدئ باللانهاية
* وتنتهي بالوحدة وحيث ان النسبة الاولى هي دائما أصغر من الثانية فهذا يدل على أنه لا يمكن
* وجود نقط على شمال نقطة ا من امتداد المستقيم اب تكون فيها النسبتان متساويتين

نتيجة ٢ — يسهل تعيين مقداري م ب و مَب بدالة المستقيم المعلوم اب المرموز له بالحرف ا لانه يحدث على مقتضى ما تقرر بنمرة (١٣١) أن

أولا $\text{م ب} = \text{ء ب} = \text{ح ب} - \text{ح ء}$ ومنه $\text{م ب} = \sqrt{\text{ا}^{2} + \frac{\text{ا}^{2}}{4}} - \frac{\text{ا}}{2} = \frac{\text{ا}}{2}(\sqrt{5} - 1)$

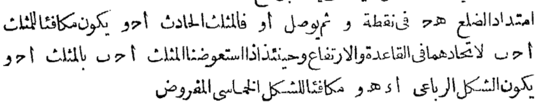
ثانيا $\text{مَ ب} = \text{ءَ ب} = \text{ح ب} + \text{ح ء}$ ومنه $\text{مَ ب} = \sqrt{\text{ا}^{2} + \frac{\text{ا}^{2}}{4}} + \frac{\text{ا}}{2} = \frac{\text{ا}}{2}(\sqrt{5} + 1)$

دعوى عملية

(١٥٥) المطلوب رسم مثلث يكافئ كثير أضلاع معلوما (شكل ١٥٠)

لحل هذه المسئلة يكفي أن نبين كيف يمكن تحويل أي شكل كثير الاضلاع الى آخر يكافئه يكون عدد رؤسه أقل بواحد من عدد رؤس الاول

ليكن ء ا ب ح هـ شكلا كثير الاضلاع فنصل أحد أقطاره اح ثم نرسم من الرأس ب المستقيم ب و موازيا لهذا القطر ونمده حتى يتقابل مع امتداد الضلع هـ ح في نقطة و ثم نوصل او فالمثلث الحادث احو يكون مكافئا للمثلث احب لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وحينئذ اذا استعوضنا المثلث احب بالمثلث احو يكون الشكل الرباعي اءهـو مكافئا للشكل الخماسي المفروض



نتيجة ١ — يمكن تحويل أي شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه وذلك لانه بعد أن يتحول الشكل المفروض الى مثلث يكافئه فانه يستخرج الوسط المتناسب بين قاعدة المثلث الحادث وبين نصف ارتفاعه فيكون هو ضلع المربع المطلوب

نتيجة ٢ ـ وكذا يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مستطيل يكافئه معلوم القاعدة لانه بعد تحويل الشكل الى مثلث يكافئه يوضع $\text{ل س} = \frac{\text{ب ع}}{٢}$

بفرض أن ل تدل على قاعدة المستطيل المعلومة و ب على قاعدة المثلث و ع على ارتفاعه و س على ارتفاع المستطيل المطلوب وحينئذ يكون س عبارة عن الرابع المتناسب بين الخطوط الثلاثة ل و ب و $\frac{\text{ع}}{٢}$

دعوى عملية

(١٥٦) المطلوب انشاء مربع يكافئ مجموع مربعين أو مربعات معلومة (شكل ١٥١)

يرمز بالحروف ا و ب و حـ و د و . . . الخ لاضلاع المربعات المعلومة وبالحرف س لضلع المربع المطلوب وحينئذ يجب أن يرسم المستقيم

$$\text{س} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + \text{د}^2 + ..}$$

فيرسم مستقيم احـ = ا ويقام من نهاية ا عمود عليه ويؤخذ اب = ب فيحدث

$$\overline{\text{بحـ}}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 \quad \text{أو} \quad \text{بحـ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$$

ثم يقام من نقطة ب عمود على حـب ويؤخذ منه ب د = حـ ويوصل حـد فيحدث

$$\overline{\text{حـد}}^2 = \overline{\text{حـب}}^2 + \text{حـ}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 \quad \text{أو} \quad \text{حـد} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2}$$

ثم يقام من نقطة د عمود على حـد ويؤخذ منه دهـ = د ويوصل هـحـ فيحدث

$$\overline{\text{حـهـ}}^2 = \overline{\text{حـد}}^2 + \text{د}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + \text{د}^2 \quad \text{أو} \quad \text{حـهـ} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + \text{د}^2}$$ وهكذا

نتيجة ـ يستنتج من هذه العملية كيف يمكن رسم المقادير $\text{ا}\sqrt{٢}$ و $\text{ا}\sqrt{٣}$ و $\text{ا}\sqrt{٥}$ وطريقة ذلك أن يرسم الشكل ١٥١ ويؤخذ فيه ا = ب = حـ = د

تنبيه ـ يتوصل بواسطة نظرية (نمرة ١١٥) الى طريقة رسم مربع يكافئ الفاضل بين مربعين معلومين

دعوى عمليـــــــة

(١٥٧) المطلوب انشاء مربع تكون نسبته الى مربع معلوم كالنسبة بين خطين معلومين (شكل ١٥٢) الخطان المعلومان هما وم = م و وى = ى وضلع المربع المعلوم هو ا

لحل هذه المسئلة يقال انه قد ثبت فى نظرية ١١٥ ان النسبة بين المربعين المنشأين على ضلعى القائمة من المثلث القائم الزاوية هى كالنسبة بين مسقطى هذين الضلعين على الوتر وهذه ملحوظة يتوصل بها مباشرة الى طريقة الحل

ش ١٥٢

فيؤخذ على مستقيم غير محدود البعد وم = م والبعد وى = ى ثم يرسم نصف محيط دائرة على مجموعهما مى ويقام من نقطة و العمود وح على مى ثم توصل نقطة ح بنقطتى م و ى فيتكون من ذلك مثلث قائم الزاوية فيه

$$\frac{\overline{\text{حم}}^2}{\overline{\text{حى}}^2} = \frac{\text{م}}{\text{ى}}$$

فاذا كان حى = ا يكون حم هو ضلع المربع المطلوب والا فيؤخذ حا = ا ويرسم اب موازيا مى ويحدث

$$\frac{\overline{\text{حب}}^2}{\overline{\text{حا}}^2} = \frac{\overline{\text{حم}}^2}{\overline{\text{حى}}^2} = \frac{\text{م}}{\text{ى}}$$

واذن يكون حب هو ضلع المربع المطلوب

دعوى عمليـــــــة

(١٥٨) المطلوب ايجاد مستقيم تكون نسبته الى مستقيم آخر معلوم كالنسبة بين مربعين معلومين (شكل ١٥٣)

ش ١٥٣

ضلعا المربعين المعلومين هما ب و حـ والمستقيم المعلوم هو م

يرسم زاوية قائمة غير محدودة الضلعين ويؤخذ على ضلعيها اب = ب و احـ = حـ ويوصل ب حـ وينزل من نقطة ا العمود اط على ب حـ فيتحصل

$$\frac{ب}{ح} = \frac{\overline{ا ب}^{2}}{\overline{ا ح}^{2}} = \frac{ب ط}{ط ح}$$

فاذا كان ط ح مساويا للطول المعلوم م يكون ب ط هو المستقيم المطلوب والا فيؤخذ ح ء = م ويرسم من نقطة ء مستقيم يوازى اح فيقابل هو أو امتداده العمود فى نقطة مثل هـ يمدّ منها المستقيم وع موازيا ب ح ويحدث

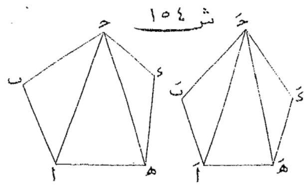
$$\frac{ب}{ح} = \frac{ب ط}{ط ح} = \frac{هـ ع}{م}$$

ويكون ع هـ هو المستقيم المطلوب

نتيجـــة — يمكن دائما ايجاد خطين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين أى شكلين معلومين وذلك بأن يحوّل أوّلا كل واحد من الشكلين المعلومين الى مربع يكافئه ثم يفرض لاحد الخطين المطلوبين طول اختيارى ويبحث عن الثانى كما مر فى الدعوى المتقدّمة

دعوى عمليـــــة

(١٥٩) المطلوب رسم شكل يشابه آخر معلوما على مستقيم معلوم (شكل ١٥٤)



فاذا كان المستقيم المعلوم اَ بَ مناظرا للضلع ا ب من الشكل المعلوم ا ب ح ء هـ وتذكرنا ما تقرر فى نظريات الاشكال المتشابهة سهل علينا الوصول الى حل هذه المسئلة فيوصل أقطار الشكل المعلوم ثم يبتدأ بانشاء مثلث على الضلع اَ بَ يشابه المثلث ا ب ح بان نرسم زاوية بَ اَ حَ = ب ا ح وزاوية اَ بَ حَ = ا ب ح ثم يرسم بعد ذلك على الضلع اَ حَ نظير الضلع ا ح مثلث يشابه المثلث ا هـ ح كما مر ويستمر العمل حتى ينتهى تشكيل الشكل اَ بَ حَ ءَ هَ الذى يتركب اذن من مثلثات مشابهة لمثلثات الشكل المعلوم ومتحدة معها فى العدد ومماثلة لها فى الوضع

دعوى عمليـــــة

(١٦٠) المطلوب رسم شكل يشابه شكلين معلومين متشابهين ويساوى مجموعهما أو التفاضل بينهما

اذا كان الشكلان المعلومان هما ح و ك وضلعاهما المتناظران هما ا و ب ورمز للشكل المطلوب بالحرف ص ولضلعه المناظر للضلعين المعلومين بالحرف س وفرض أن المسئلة محلولة فمن حيث أن الشكلين ح و ك متشابهان يحدث

$$\frac{ح}{ك} = \frac{ا^2}{ب^2} \quad \text{أو} \quad \frac{ح}{ح \pm ك} = \frac{ا^2}{ا^2 \pm ب^2}$$

وحيث ان الشكل المطلوب ص يجب أن يكون مشابها لكل واحد من الشكلين المعلومين لزم أن يكون

$$\frac{ح}{ص} = \frac{ا^2}{س^2}$$

فاذا قارناهذا التناسب بالسابق ولاحظنا أن ص يجب أن يكون مساويا ح + ك لزم أن يكون $س^2 = ا^2 ب^2$ أعني يكون س وتر المثلث قائم الزاوية ضلعا قائمته ا و ب
واذا لاحظنا أن ص يجب أن يكون مساويا ح — ك لزم أن يكون $س^2 = ا^2 - ب^2$ أعني أن س يكون أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية وتره ا وضلعه الثالث ب
وحينئذ فقد رجع الامر الى مسئلة نمرة (١٥٦)

دعوى عمليـــــــة

(١٦١) المطلوب رسم شكل يشابه شكلا آخر معلوما وتكون نسبته اليه كنسبة خطين معلومين م و ن

اذا كان ح رمزا للشكل المعلوم و ا رمزا لاحد أضلاعه و ص رمزا للشكل المطلوب و س رمزا لاحد أضلاعه المناظر للضلع ا فانه يحدث على مقتضى المنطوق أن

$$\frac{ص}{ح} = \frac{م}{ن}$$

وحيث ان الشكلين يجب أن يكونا متشابهين يحدث أيضا

$$\frac{ص}{ح} = \frac{س^2}{ا^2}$$

ومن هذين التناسبين يحدث

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{م}{ن}$$

وحينئذ فقد رجع الامر الى نظرية نمرة (١٥٧)

دعوى عمليـــــــة

(١٦٢) المطلوب رسم شكل يشابه شكلا معلوما ع ويكافئ آخر معلوما ك

نفرض أن س هو ضلع الشكل ص المجهول المناظر للضلع ا من الشكل المعلوم ع ونفرض أن م و ن ضلعا المربعين المكافئين بالتناظر للشكلين ك و ع فيحدث

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{ص}{ع} = \frac{ك}{ع}$$

وكذا يحدث أيضا أن

$$\frac{س^2}{ا^2} = \frac{م^2}{ن^2}$$

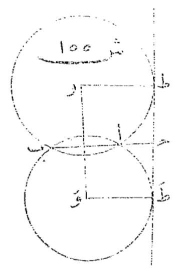
وبأخذ جذر حدود هذا التناسب بفرض أن تلك الخطوط مقدرة بأعداد يحدث

$$\frac{س}{ا} = \frac{م}{ن}$$

واذن يكون س رابعا متناسبا بين الخطوط الثلاثة ا و م و ن

دعوى عمليـــــــة

(١٦٣) المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين ا و ب ويمس مستقيما معلوما حط (شكل ١٠٠)



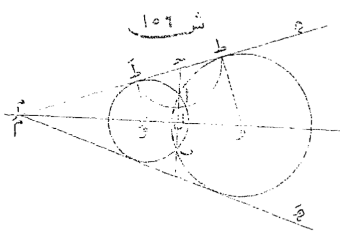
نفرض أن المسئلة محلولة وأن و هى مركز الدائرة المطلوبة فاذا مدّ المستقيم ا ب حتى يقابل المستقيم المعلوم فى نقطة ح فمن حيث ان ح ط يجب أن يكون مماسا لمحيط الدائرة يحدث $\overline{حط}^2 = حب \times حا$ واذن يكون ح ط وسطا متناسبا بين حا و حب فاذا بحثنا عن مقداره وأخذ فى جهتى نقطة ح بعدان مساويان لطول هذا الوسط المتناسب فانه يتوصل الى حلين للمسئلة

تنبيـــه ١ — اذا كان وضع النقطتين ا و ب حاصلا فى جهتى المستقيم المعلوم حط تكون المسئلة غير ممكنة الحل

تنبيـــه ٢ — فى حالة ما يكون المستقيم ا ب موازيا للمستقيم المعلوم فانه لا يتأتى اجراء العمل المتقدم غير أنه فى هذه الحالة يسهل ايجاد نقطة التماس كما لا يخفى

دعوى عمليـــــــة

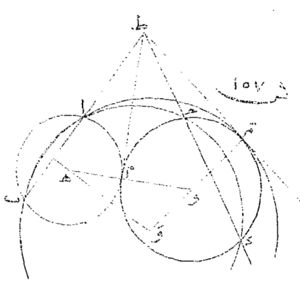
(١٦٤) المطلوب رسم محيط دائرة يمس مستقيمين معلومين م ق و م ق َ ويمر بنقطة معلومة ا (شكل ١٥٦)



يمكن أن يتوصل الى حل هذه المسئلة بواسطة ترجيعها الى المتقدمة وذلك لان مركز الدائرة المطلوبة يوجد ضرورة على المستقيم المنصف للزاوية الكائنة بين المستقيمين ومن جهة أخرى اذا أنزل من نقطة ا المعلومة عمود على المستقيم المنصف وأخذ عليه ل ب = ل ا فان نقطة ب توجد أيضا على محيط الدائرة المطلوبة وحينئذ فيؤل الامر الى تمرير محيط دائرة يمر بالنقطتين المعلومتين ا و ب ويمس مستقيما معلوما م ق

دعوى عمليـــــــة

(١٦٥) المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين ا و ب ويمس محيط دائرة معلومة و (شكل ١٥٧)



نفرض أن المسئلة محلولة وأن دائرة هـ هي الدائرة المطلوبة فاذا مد من نقطة تماس محيطي الدائرتين م مماس مشترك لهما م ط ومد ا ب على استقامته حتى يقابل هذا المماس المشترك في نقطة ط وانتخبت نقطة ما مثل ح على محيط الدائرة المعلومة ووصل المستقيم ط ح ى فانه يحدث بمقتضى ما سبق بنمرة (١٤٠) أن

$$\overline{\text{م ط}}^{2} = \text{ط ب} \times \text{ط ا} \quad \text{و} \quad \overline{\text{م ط}}^{2} = \text{ط ى} \times \text{ط ح} \quad \text{أو} \quad \text{ط ب} \times \text{ط ا} = \text{ط ى} \times \text{ط ح}$$

واذن فتوجد النقط الاربعة ب و ا و حـ و د على محيط دائرة واحد وحينئذ اذا رسمت الدائرة التى تمر بالنقط الثلاثة المعلومة ب و ا و حـ فانها تعين النقطة الرابعة بتقاطع هذه الدائرة بالدائرة المعلومة وبذلك تعلم طريقة الحل

وهى أن تؤخذ نقطة اختيارية حـ على الدائرة المعلومة ويمر بها و بالنقطتين المعلومتين محيط دائرة فيقطع محيط الدائرة المعلومة فى نقطة د فاذا وصل حـ د ومدّ على استقامته ثم مدّ ا ب أيضا حتى يتلاقيا فى نقطة ط ورسم المماس ط م للدائرة المعلومة كانت نقطة م هى نقطة تماس الدائرة المطلوبة بالدائرة المعلومة وأما مركز الدائرة المطلوبة فيوجد فى تقاطع العمود المقام على وسط الوتر ا ب مع العمود م هـ المقام على المماس

حيث انه يمكن مدّ مماس آخر ط مَ للدائرة المعلومة فيكون اذن للمسئلة حلان وتكون نقطة هـَ مركزا للدائرة الثانية الموفية للشروط المعلومة

وبمثل ذلك يجرى العمل لو كان النقطتان داخل الدائرة أما اذا كانت احدى النقطتين داخل الدائرة المعلومة والثانية خارجها فتكون المسئلة غير ممكنة

دعوى عمليـــــــــة

(١٦٦) المطلوب ايجاد المحل الهندسى للنقط التى تكون بحيث ان مجموع مربعى البعدين الواصلين من أيها الى نقطتين معلومتين ثابتتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٨)

ليكن ب و حـ النقطتين المعلومتين الثابتتين و $م^٢$ المربع الثابت المعلوم فاذا فرض ان نقطة ا هى احدى نقط المحل الهندسى تحصل على مقتضى المنطوق أن



$$\overline{اب}^٢ + \overline{احـ}^٢ = م^٢$$

لكن

$$\overline{اب}^٢ + \overline{احـ}^٢ = ٢\ \overline{او}^٢ + ٢\ \overline{بو}^٢$$

بفرض أن نقطة و هى وسط المستقيم حـ ب وحينئذ يكون

$$٢\ \overline{او}^٢ + ٢\ \overline{وب}^٢ = م^٢ \quad \text{أو} \quad \overline{او}^٢ = \frac{م^٢ - ٢\ \overline{وب}^٢}{٢} = \frac{٢م^٢}{٤} - \overline{وب}^٢$$

وحيث كان $م^٢$ ثابتا وكان وب نصف ب حـ ثابتا أيضا فيكون مقدار $\overline{او}^٢$ ثابتا كذلك أعنى يكون بعد نقطة ا عن نقطة و ثابتا دائما واذن فيكون المحل الهندسى هو محيط دائرة نصف قطره الضلع الثالث من مثلث قائم الزاوية وتره يساوى $\frac{١}{٢}$ م $\sqrt{٢}$ وضلعه الآخر يساوى ب و

دعوى عمليـــــــة

(١٦٧) المطلوب ايجاد المحل الهندسي للنقط التي تكون بحيث ان الفرق بين مربعي البعدين الواصلين من أيها الى نقطتين معلومتين ثابتتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٩)

لتكن ا احدى نقط المحل و و ى مسقط الخط المتوسط او للمثلث اب ح على ب ح

وليكن م² المربع المعلوم فعلى حسب المنطوق يكون

$$\overline{اب}^2 - \overline{اح}^2 = م^2$$

وعلى مقتضى ما تقرر في نظرية نمرة (١١٨) يحدث

$$\overline{اب}^2 - \overline{اح}^2 = ٢ب ح \times و ى$$

وحينئذ يكون

$$٢ب ح \times و ى = م^2 \quad \text{ومنه} \quad و ى = \frac{م^2}{٢ب ح}$$

وحيث كان كل من م² و ب ح ثابتا فيكون مقـدار و ى كذلك ويكون المحـل حينئذ هو المستقيم اى العمودي على المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين ويكون بعده عن وسط هذا المستقيم هو الرابع المتناسب بين الخطوط ٢ب ح و م و م

الفصـــــــل السابـــع

تمـــــرينات

١ – اذا دل العـددان ٧٥ مترا مربعا و ٢٥ مترا مربعا على مسطحي مستطيلين متحـدى القاعدة وكان ارتفاع أكبرهما ١٥ مترا فما مقدار ارتفاع الثاني

٢ – اذا دل العـددان ١٥ متر و ٥ متر على قاعدتي مستطيلين متحـدى الارتفاع وكانت مساحة أصغرهما ٢٥ مترا مربعا فما تكون مساحة المستطيل الثاني

٣ – اذا دل العدد ١٢٠ مترا مربعا على مساحة مستطيل قاعدته ٢٠ مترا والمطلوب تعيين ارتفاع المثلث الذى قاعدته أربعة أمثال قاعدة هذا المستطيل ومساحته ثلاثة أمثال مساحتـــــه

٤ — اذادل عدد ٢٥ على النسبة الكائنة بين مربعين فما مقدار النسبة بين ضلعيهما

٥ — المطلوب تعيين النسبة الكائنة بين مربعين ضلعاهما ٣ متر و ٦ متر

٦ — اذا كان طول العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره مساويا ٤ متر وكان طول أحد ضلعي القائمة مساويا ٥ متر وطول مسقطه على الوتر مساويا ٣ متر والمطلوب تعيين مقدار طول ضلعها الثانى ومقدار مسقطه على الوتر

٧ — اذادل عدد ١٨ مترا مربعا على مربع وتر المثلث القائم الزاوية المتساوى الساقين والمطلوب تعيين طول العمود النازل من الراس على الوتر

٨ — اذادلت الاعداد ٥ متر و ٧ متر و ٩ متر على أطوال أضلاع مثلث والمطلوب تعيين أطوال المستقيمات المتوسطة له

٩ — اذادل العددان ٦ و ٨ على مقاسى ضلعى مثلث ثم وصل بين منتصفيهما بمستقيم طوله ٤٫٥ متر والمطلوب تعيين مقدار ضلعه الثالث

١٠ — اذادلت الاعداد ٢٠ متر و ٢٢ متر و ٣٠ متر على أضلاع مثلث ثم نصفت الزاوية المحصورة بين الضلعين ٢٠ متر و ٢٢ متر بمستقيم والمطلوب تعيين مقدارى سهمى الضلع الثالث المحددين بالمستقيم المنصف

١١ — اذا قطع الضلعان أ ب و أ ح من المثلث أ ب ح بالمستقيم ء هـ الموازى لقاعدته ب ح والمتباعد عنها بالبعد ع والمطلوب حساب بعد المستقيم القاطع ء هـ عن الرأس أ اذا كان ء هـ = ١٨ متر و ب ح = ٢٥ متر و ع = ٢٫٢٠ متر (شكل ١٦٠)

١٢ — المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفى قطرى شبه المنحرف يساوى نصف الفرق بين قاعدتيه المتوازيتين

١٣ — اذا مد فى دائرة نصف قطرها ١٫٢٠ متر وتر طوله متر واحد والمطلوب تعيين بعده عن المركز

١٤ — اذا مد فى دائرة نصف قطرها ٨ متر وتر طوله ٨ متر والمطلوب حساب سهمى قطر الدائرة العمودى على هذا الوتر والمحددين به

١٥ — اذادل العددان ٨ متر و ٣ متر على نصفى قطرى دائرتين والعدد ١٥ متر على البعد الكائن بين مركزيهما والمطلوب حساب طول المماس المشترك بينهما فى الخارج

١٦ — اذادلت الاعداد ٨ متر و ٩ متر و ١٥ متر على أطوال أضلاع مثلث فانوع الزاوية المقابلة للضلع الاكبر منه

١٧ — اذادل العددان ٨ متر و ١٠ متر على نصفي قطري دائرتين والعدد ١٢ متر على مقدار البعد بين مركزيهما والمطلوب حساب طول الوتر المشترك بينهما

١٨ — المعلوم زاوية ونقطة داخلها والمطلوب مد مستقيم من هذه النقطة قاطعا ضلعي الزاوية بحيث تكون النسبة بين البعدين المحصورين بين هذه النقطة وضلعي الزاوية مساوية $\frac{٢}{٣}$

١٩ — المعلوم مستقيم م والمطلوب تعيين مستقيم آخر بحيث يكون مربعه مساويا $\frac{٣}{٥}$ م^{٢}

* ٢٠ — طريقة رسم مربع داخل مثلث معلوم

* ٢١ — المطلوب تعيين المثلث القائم الزاوية الذى تكون مقادير أضلاعه الثلاثة أعدادا متوالية

* ٢٢ — اذا كان الفرق بين ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية مساويا ٧ متر وكان طول
* وتره مساويا ١٣ متر والمطلوب حساب ضلعي القائمة

* ٢٣ — المطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية اذا علم أن طول وتره يزيد عن أحد ضلعي
* القائمة مترا واحدا وعن الضلع الثانى ثمانية أمتار

* ٢٤ — اذا كان وتر المثلث القائم الزاوية مساويا ٥٥ متر ومجموع الضلعين المحيطين بالقائمة
* مساويا ٧٧ متر والمطلوب تعيين ضلعي القائمة

* ٢٥ — اذا كان مجموع الاضلاع الثلاثة للمثلث القائم الزاوية مساويا ٦٠ متر والفرق بين
* الضلعين المحيطين بالقائمة مساويا ٥ متر والمطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم
* الزاوية الثلاثة

* ٢٦ — اذا علم القسم الاكبر من قسمي المستقيم المنقسم الى قسمة ذات وسط وطرفين والمطلوب تعيين طول المستقيم الاصلي

الباب الثانى
فى الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة

تعاريف

(١٦٨) الشكل المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه

مقدار أى زاوية من أى شكل منتظم مرتبط بعدد أضلاعه فاذا كان ى دالا على عدد أضلاع شكل منتظم كان مجموع الزوايا القائمة الداخلة فيه مساويا ٢ (ى — ٢) = ٢ ى — ٤ وعليه فقدار كل زاوية يساوى $\frac{٢ى — ٤}{ى}$ = ٢ — $\frac{٤}{ى}$

أبسط الاشكال المنتظمة هو المثلث المتساوى الاضلاع ومقدار زاويته هو $\frac{٢}{٣}$ قائمة

ومما ذكر ينتج أن الشكلين المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع تكون زواياهما متساوية

(١٦٩) حيث ان الزوايا متساوية فى أى شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع وان النسبة بين أى ضلعين منهما مساوية بالضرورة للنسبة الكائنة بين أى ضلعين آخرين فيكونان اذن متشابهين

(١٧٠) يوجد أشكال منتظمة من كل نوع من أنواع الاشكال

لانا لو تصورنا انقسام محيط دائرة الى أجزاء متساوية عددها م ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك كثير أضلاع منتظم عدد أضلاعه ى وذلك لانه أولا حيث ان أضلاعه أوتار لاقواس متساوية فتكون متساوية وثانيا حيث ان زواياه مرسومة فى قطع متساوية فتكون متساوية أيضا

* (١٧١) اذا قسم محيط دائرة الى أقسام متساوية عددها م ولم نصل بين نقط التقاسيم
* المتوالية بمستقيمات كما سبق ذكر ذلك بل وصل بينها نونا نونا (أى وصل بين النقطة الاولى
* والثالثة وبين الثالثة والخامسة وبين الخامسة والسابعة وهكذا أو وصل بين النقطة الاولى
* والخامسة وبين الخامسة والتاسعة وهكذا) وكان ى أوليا مع م فانا نبرهن على انا نرجع
* الى نقطة المبدأ بعد عمليات عددها م

* ولذلك يقال اذا رمز بالحرف ح لمحيط الدائرة فان مقدار كل قسم من الاقسام المنقسم اليها
* يكون مساويا $\frac{ح}{م}$ ومتى وصلت نقط التقاسيم نونا نونا فان مقدار كل قوس موتر بأحد هذه
* الاوتار يكون مساويا الى $\frac{ى ح}{م}$ وحينئذ فلاجل تطبيق وتر هذا القوس على المحيط مرارا

* ثم العودة الى نقطة المبدأ يجب أن يكون تكرار هذا القوس $\frac{\text{ن ع}}{\text{م}}$ عدة مرات عددها س
* مساويا للعدد صحيح من المحيطات نرمز له بحرف ل وبناء عليه يكون

$$\frac{\text{ن ع س}}{\text{م}} = \text{ل ع} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{ن س}}{\text{م}} = \text{ل} \qquad (1)$$

* وحيث ان ل عدد صحيح لزم أن يكون الكسر $\frac{\text{ن س}}{\text{م}}$ دالا أيضا على عدد صحيح ولما كان
* ن أوليا مع م فرضا لزم أن يكون $\frac{\text{س}}{\text{م}}$ عددا صحيحا وحينئذ فاقل مقدار يعطى الى س
* يكون هو م وهو المطلوب
* الشكل المتكون بهذه الصورة يسمى شكلا منتظما نجميا والبرهنة على تساوى أضلاعه
* وزواياه سهلة غير اننا نلاحظ أيضا أنه يمكن الحصول على عين الشكل المنتظم النجمى المذكور
* سواء وصل بين نقط التقاسيم نونا نونا كما ذكر أو وصل بينها (م – ن) و (م – ن)
* وينتج من ذلك أنه يمكن الوصول الى جميع الاشكال المنتظمة الممكنة التى عددها م بواسطة
* البحث عن جميع الاعداد الاولية مع م من ابتداء الواحد الى $\frac{\text{م}}{2}$
* فاذا فرض الآن وجود عامل مشترك هـ بين م و ن بأن كان ن = نَ هـ و م = مَ هـ
* مثلا فان المتساوية (1) السابقة تؤل الى

$$\frac{\text{نَ هـ س}}{\text{مَ هـ}} = \text{ل} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{نَ س}}{\text{مَ}} = \text{ل} \qquad (2)$$

* وهذه المتساوية الاخيرة تدل على أنه اذا أعطى س مقدارا مساويا مَ فانا نرجع الى نقطة
* المبدأ بعد عمليات عددها مَ وبذلك يتوصل الى كثير اضلاع منتظم عدد أضلاعه مَ
* ولنطبق ما ذكر على بعض أمثلة فنقول

* أولا – اذا قسم المحيط الى خمسة أقسام متساوية ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية
* بمستقيمات فانا نتوصل الى الشكل الخماسى المنتظم المحدب أما اذا وصل بين نقط التقاسيم
* اثنين اثنين فانا نرجع الى نقطة المبدأ بعد خمس عمليات حيث ان عدد 2 أولى مع عدد 5
* وبذلك نتوصل الى الشكل الخماسى المنتظم النجمى

* ثانيا – اذا قسم محيط الدائرة الى عشرة أقسام متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية
* بمستقيمات فانا نتوصل الى الشكل المعشر المنتظم المحدب وأما اذا وصلت ثلاثا ثلاثا فانا نتوصل
* الى الشكل المعشر المنتظم النجمى

* ثالثا – اذا قسم محيط الدائرة الى خمسة عشر جزءا متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية
* بمستقيمات فانا نتوصل الى الشكل ذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحدب وأما اذا وصلت نقط

* التقاسيم اثنتين اثنتين أو أربعاً أربعاً أو سبعاً سبعاً فانا نتوصل الى الاشكال الثلاثة المنتظمة
* النجمية ذوات الخمسة عشر ضلعا

(١٧٢) الخط المنكسر المنتظم هو خط مضلع زواياه متساوية وأضلاعه كذلك ومثل هذه الخطوط المنكسرة المنتظمة ليست دائماً أجزاء من أشكال منتظمة وانما يكون لها فقط بعض خواص الاشكال المنتظمة المحدبة

الفصـــــــل الاول

فى الاشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة وخارجها

دعوى نظـــــــرية

(١٧٣) كل شكل منتظم محدب يمكن أن يرسم عليه محيط دائرة واحد فقط يمر برؤس زواياه وواحد آخر فقط داخله يمس جميع أضلاعه (شكل ١٦١)

ش ١٦١

فاذا كان الشكل المنتظم المعلوم هو ا ب ح ء هـ و يقال أولا — يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح محيط دائرة يكون مركزه كما هو معلوم فى تقاطع العمودين ع م و ط م القامين على وسطى ا ب و ب ح ثم يوصل المركز بنقطة ء رأس الزاوية التى تلى زاوية ح فاذا طبقنا الشكل الرباعى م ط ب ا على الشكل الرباعى م ط ح ء بأن نجعل م ط فاصلا مشتركا فان نقطة ب تقع ضرورة على نقطة ح ويأخذ الضلع ا ب الاتجاه ح ء حيث ان زاوية ب = زاوية ح وتقع نقطة ا على نقطة ء لان الضلع ا ب = الضلع ح ء ويكون م ا = م ء وحينئذ فلابد من أن محيط الدائرة الذى مر بالنقط الثلاث ا و ب و ح يمر أيضا بنقطة ء التالية لها وكذلك لما كان هذا المحيط يمر بالنقط الثلاث ب و ح و ء فلابد له أن يمر أيضا بنقطة هـ التالية لها كما مر وهكذا وبذلك قد ثبت امكان رسم محيط دائرة يمر برؤس الشكل المنتظم المعلوم ويسهل البرهنة على عدم امكان امرار محيط آخر يمر برؤس الشكل المذكور حيث ان كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحد

تنبيه — اذا وصل من المركز الى جميع رؤس الشكل بمستقيمات فان المثلثات الحادثة من ذلك تكون متساوية لتساوى الاضلاع الثلاثة فيها وحينئذ فالمستقيمات م ا و م ب و ... الخ تكون منصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ

ثانيا — حيث كانت نقطة م موجودة على جميع المستقيمات المنصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ فتكون جميع الاعمدة النازلة منها على أضلاعها مثل م ع و م ط و ... الخ متساوية وبناء عليه اذا جعلت نقطة م مركزا وبنصف قطر مساو أحدها م ع ورسم محيط دائرة فانه يمر بالنقط ع و ط و ى و ... الخ ويكون مماسا للاضلاع فيها واذن فقد أمكن تمرير محيط دائرة داخل الشكل المفروض يمس أضلاعه

وأما البرهنة على عدم امكان امرار محيط آخر غير السابق فهى انه لو فرض امكان امرار محيط آخر موف للشرط المتقدم يقال حيث ان مركزه لابد أن يكون على ابعاد متساوية من أضلاع الشكل المذكور فلا يكون موجودا الا فى تقاطع المستقيمات المنصفة للزوايا ا و ب و ح و ... الخ وحينئذ فلا يكون خلاف نقطة م ولا يكون نصف قطره خلاف العمود م ع وهو المطلوب

تنبيـــه ١ — نقطة م التى هى مركز مشترك للدائرتين المرسومتين خارج الشكل وداخله تعتبر أيضا مركزا للشكل ولهذا السبب يطلق اسم الزاوية المركزية فى الشكل المنتظم على الزاوية ا م ب التى رأسها بالمركز وضلعاها نصفا القطرين الواصلان الى نهايتى الضلع ا ب

ولما كانت أضلاع الشكل كلها متساوية تكون الزوايا المركزية كذلك وحينئذ فقدار أى واحدة منها يساوى خارج قسمة أربع قوائم على عدد أضلاع الشكل

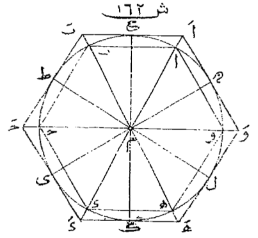
تنبيـــه ٢ — حيث ان برهنة النظرية المتقدمة مؤسسة على تساوى الاضلاع المتوالية اب و بح و حد و ... الخ وعلى تساوى الزوايا المحصورة بينها فتنطبق ضرورة على الخط المنكسر المنتظم بمعنى أن كل خط منكسر منتظم يمكن أن يرسم عليه دائرة تمر برؤس زواياه وأخرى داخله تمس أضلاعه

دعوى عمليـــــة

(١٧٤) اذا علم مضلع منتظم ا ب ح د هـ و مرسوم داخل دائرة والمطلوب رسم شكل منتظم على الدائرة مشابه للاول أى متحد معه فى عدد الاضلاع (شكل ١٦٢)

طريقة ذلك أن ينزل من المركز أنصاف الاقطار م ع و م ط و م ى و ... الخ عمودية على أضلاع الشكل المعلوم ثم يرسم من النقط ع و ط و ى و ... الخ مماسات لمحيط الدائرة فيتشكل بذلك المضلع المنتظم المطلوب

والبرهنة على ذلك يقال يجب أن يبرهن على أن النقط الثلاثة م و ب و دَ على استقامة واحـــدة



وللوصول الى ذلك يقال

ان المثلثين القائمى الزاوية ع م بَ و بَ م ط فيهما الوتر م بَ مشترك والضلع م ع = الضلع م ط واذن يكونان متساويين و ينتج من تساويهما أن الزاوية المركزية ع م بَ = الزاوية المركزية بَ م ط وبناء عليه فيمر المستقيم م بَ بنقطة ب وسـط القوس ع ط وبعين هذا السبب توجد النقط حَ و دَ و هَ و ... الخ على امتداد المستقيمات م ح و م ء و م هـ و ... الخ

لكنه حيث كان أ بَ موازيا أ ب و بَ حَ موازيا ب ح تكون زاوية أ بَ حَ = زاوية أ ب ح وبمثل ذلك تكون باقى زوايا الشكلين المتناظرة متساوية وبذلك يكون الشكل الخارجى متساوى الزوايا

والبرهنة على تساوى أضلاعه يؤخذ من تشابه المثلثات التى رؤسها بالمركز أن

$$\frac{\text{أب}}{\text{أَبَ}} = \frac{\text{بح}}{\text{بَحَ}} = \frac{\text{حء}}{\text{حَءَ}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءَهَ}} = \frac{\text{هـو}}{\text{هَوَ}} = \frac{\text{وأ}}{\text{وَأَ}}$$

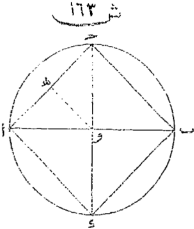
وحيث كانت المقدمات متساوية تكون التوالى كذلك

نتيجــة ١ ـ وبالعكس اذا علم شكل منتظم مرسوم خارج الدائرة وكان المطلوب رسم شكل آخر منتظم داخلها مشابه للاوّل فانه يكفى فى ذلك اما أن يوصل المركز بجميع رؤس الشكل الخارج بمستقيمات تقابل المحيط فى نقط يوصــل بينها بأوتار واما أن توصــل نقط التماس بأوتار فيتشكل من كل واحدة من هاتين الطريقتين الشكل المطلوب

نتيجــة ٢ ـ ينتج مما تقدّم أنه يمكن أن يرسم على أى دائرة جميع الاشكال المنتظمة التى يمكن رسمها داخلها وبالعكس

دعوى عملية

(١٧٥) المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة (شكل ١٦٣) أعنى تقسيم محيط دائرة معلومة الى أربعة أقسام متساوية



تحل هذه المسئلة مباشرة بواسطة رسم قطرين متعامدين فيه ا ب و حـ د وبوصل نقط التقاسيم المتوالية ببعضها بمستقيمات فيتشكل بذلك المربع ا حـ ب د (١٧٠)

نتيجة ١ - اذا رمزنا بالحرف ا لضلع المربع ا حـ وبالرمز س لنصف قطر الدائرة و ا فانه يتحصل من المثلث القائم الزاوية ا و حـ أن $\text{ا}^{2} = 2\,\text{س}^{2}$ أو $\text{ا} = \text{س}\sqrt{2}$ واذن فالكميتان ا و س غير متناسبتين

نتيجة ٢ - اذا قسم كل جزء من أجزاء المحيط الاربعة الى قسمين متساويين ثم قسم كل قسم من هذه الاقسام الى جزءين متساويين وكل واحد من هذه الاجزاء الاخيرة الى جزءين متساويين أيضا وهكذا وفى كل مرة وصلت النقط المتوالية بمستقيمات فانه يتشكل من ذلك المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة وذو الستة عشر ضلعا المنتظم وذو الاثنين وثلاثين ضلعا المنتظم وهكذا

دعوى عملية

(١٧٦) المطلوب رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٤)

نفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب هو ضلع المسدس المطلوب أى ان القوس المقابل له هو سدس المحيط فاذا وصل نصفا القطرين م ب و م ا فالمثلث الحادث يكون متساوى الساقين وحيث كانت زاوية ا م ب مساوية $\frac{4}{6}$ قائمة أو $\frac{2}{3}$ قائمة يكون مجموع الزاويتين الأخريين المتساويتين مساويا $\frac{4}{3}$ قائمة وحينئذ يكون مقدار كل واحدة منهما مساويا $\frac{2}{3}$ قائمة ويكون المثلث بناء عليه متساوى الاضلاع ويكون ضلعه ا ب مساويا نصف القطر م ا وحينئذ فلاجل رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة أو تقسيم محيط دائرة الى ستة أقسام متساوية يطبق نصف القطر على المحيط ست مرات كأنه وتر

نتيجة ١ — اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين بمستقيمات تشكل من ذلك المثلث المتساوى الاضلاع ولايجاد النسبة الكائنة بين ضلعه ونصف القطر يلاحظ ان الشكل م ا ب ح شكل معين وعلى مقتضى ما تقرر فى نظرية (نمرة ١١٩ نتيجة ١) يحدث بفرض ان ا يدل على ضلع المثلث

$$ا^٢ + س^٢ = ٤ س^٢ \quad ومنه \quad ا^٢ = ٣ س^٢ \quad أو \quad ا = س \sqrt{٣}$$

وحينئذ يكون ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة ونصف قطرها غير متناسبين

ولنلاحظ أوّلا ان العمود م ع النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المثلث المتساوى الاضلاع ا ح هـ مساو نصف نصف قطر الدائرة المذكورة

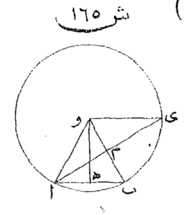
ثانيا ان العمود م ن النازل من مركز الدائرة على أحد أضلاع المسدس مساو نصف ضلع المثلث المتساوى الاضلاع

نتيجة ٢ — بواسطة تقسيم أى قوس الى قسمين متساويين ومثله نصفه وربعه وثمنه وهكذا بطريقة مستمرة يتوصل الى رسم داخل الدائرة جميع المضلعات المنتظمة التى تكون عدد أضلاعها حدود هذه المتوالية

$$٣ \text{ و } ٣ \times ٢ \text{ و } ٣ \times ٢^٢ \text{ و } ٣ \times ٢^٣ \text{ و } ٣ \times ٢^٤ \text{ و } \ldots$$

دعوى عملية

(١٧٧) المطلوب رسم المعشر المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٥)



نفرض ان المسئلة محلولة وان ا ب هو ضلع المعشر المطلوب فاذا وصل نصفا القطرين و ا و و ب فالمثلث الحادث ا و ب يكون متساوى الساقين غير أن زاوية و = $\frac{٤}{١٠}$ أو $\frac{٢}{٥}$ قائمة وعليه فيكون مجموع زاويتيه المتساويتين مساويا $\frac{٨}{٥}$ قائمة ويكون مقدار كل واحدة منهما مساويا $\frac{٤}{٥}$ قائمة ثم اذا مد المستقيم المنصف لزاوية ا يكون مقدار زاوية ا م ب مساويا ضرورة $\frac{٤}{٥}$ قائمة واذن يكون كل واحد من المثلثين ا م ب و ا م و متساوى الساقين ويكون ا ب = ا م = م و لكنه بناء على ما تقرر فى نظرية نمرة (١٢٣) يحدث

$$\frac{ا و}{و م} = \frac{ا ب}{م ب} \quad أو \quad \frac{و ب}{و م} = \frac{و م}{م ب}$$

وحينئذ يكون ضلع العشر هو القسم الاكبر من تقسيم نصف القطر الى قسمة ذات وسط وطرفين

نتيجة ١ — اذا جعل س رمزا لنصف قطر الدائرة و ى رمزا لضلع المعشر المنتظم المحدب حدث

$$ى = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} - ١)$$

نتيجة ٢ — اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنين اثنين فانه يتكون من ذلك المخمس المنتظم المحدب واذا قسم كل قوس من أعشار المحيط الى قسمين متساويين وكل واحد من الاقواس الجديدة الى قسمين متساويين أيضا وهكذا ووصلت نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات تكون من ذلك الاشكال المنتظمة التي تتركب من عدد أضلاعها هذا المتوالية

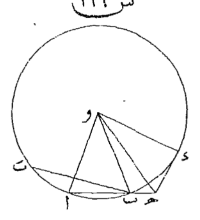
$$٥ ، ٥ \times ٢ ، ٥ \times ٢^{٢} ، ٥ \times ٢^{٣} ، ...$$

* تنبيـــه — اذا مد المستقيم ام على استقامته حتى يلاقي المحيط في نقطة ى فان هذه
* النقطة تكون نهاية القسم الثالث من ابتداء نقطة ا عند تقسيم المحيط الى عشرة أقسام
* متساوية وعليه يكون اى هو ضلع المعشر المنتظم النجمي
* وللبرهنة على ذلك يقال
* من المعلوم ان المثلث واى متساوي الساقين وان زاوية واى $= \frac{٢}{٥}$ قائمة فتكون
* المساوية لها كذلك ويكون مقدار زاوية اوى مساويا $\frac{٦}{٥}$ قائمة وهي ثلاثة أمثال
* مقدار الزاوية المقابلة لضلع المعشر
* ولايجاد مقدار هذا الضلع يقال
* ان في المثلث وىم زاوية ىوم $= \frac{٤}{٥}$ قائمة وهي تساوي زاوية ومى واذن يكون
* $وى = ىم = س$ ويكون
* $اى = ام + س = اب + س = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} - ١) + س = \frac{س}{٢} (\sqrt{٥} + ١)$
* أعني انه يتوصل الى ضلع المعشر المنتظم النجمي بواسطة قسمة نصف القطر الى قسمة ذات وسط
* وطرفين وأخذ البعد المقابل للحل الثاني المأخوذ على امتداد المستقيم المنقسم

دعوى نظـــــــرية

(١٧٨) ضلع المخمس المنتظم المحدب المرسوم داخل الدائرة هو وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه الآخران هما نصف قطر الدائرة وضلع المعشر المنتظم المحدب المرسوم داخلها (شكل ١٦٦)

ليكن اب ضلع المعشر المنتظم المحدب المرسوم داخل الدائرة و فيمد على استقامته ويؤخذ عليه البعد اح = او ثم يوصل و ح فيكون هو ضلع المخمس المنتظم المحدب فى الدائرة التى مركزها ا ونصف قطرها اح = او لان زاوية واح = $\frac{٤}{٥}$ قائمة ثم يرسم من نقطة ح المستقيم ح ى مماسا لمحيط الدائرة ويوصل و ى فاذا أثبتنا ان المماس ح ى مساو لضلع المعشر المنتظم المحدب اب ثبت المطلوب



ولذلك يقال من المعلوم ان

$$\overline{\text{حى}}^2 = \text{حا} \times \text{حب}$$

وحيث كان اب مساويا لضلع المعشر المنتظم فرضا و اح مساويا لنصف القطر يحدث

$$\overline{\text{اب}}^2 = \text{اح} \times \text{حب}$$

وحينئذ يكون ح ى = اب وهو المطلوب

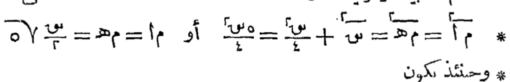
نتيجة ١ – اذا رمز بالحرف ى لضلع المعشر وبالحرف ع لضلع المخمس وبالرمز س لنصف القطر حدث (١٧٧ نتيجة ١)

$$\text{ع}^2 = \text{ى}^2 + \text{س}^2 = \frac{\text{س}^2}{٤}(\sqrt{٥} - ١)^2 + \text{س}^2 = \frac{\text{س}^2}{٤}(١٠ - ٢\sqrt{٥}) \quad \text{أو}$$

$$\text{ع} = \frac{\text{س}}{٢}\sqrt{١٠ - ٢\sqrt{٥}}$$

* نتيجة ٢ – (شكل ١٦٧) يمكن الوصول الى معرفة طول ضلعى المخمس المنتظم والمعشر
* المنتظم المحدبين المرسومين داخل الدائرة بطريقة سهلة كما يأتى
* وهو أن يرسم داخل الدائرة قطران متعامدان اب و ح ى
* ثم يرسم من نقطة م وسط نصف القطر ى و محيط دائرة
* بنصف قطر مساو م ا فيقطع المستقيم ى ح فى نقطة هـ
* فيكون هـ و هو ضلع المعشر المنتظم و اهـ هو ضلع المخمس
* المنتظم المحدبين المرسومين داخل الدائرة وذلك لان

ش ١٦٧



* $\overline{\text{م ا}}^2 = \overline{\text{مه}}^2 = \overline{\text{س}}^2 + \frac{\text{س}^2}{٤} = \frac{٥\text{س}^2}{٤}$ أو $\text{م ا} = \text{مه} = \frac{\text{س}}{٢}\sqrt{٥}$
* وحينئذ يكون
* $\text{وه} = \text{مه} - \text{مو} = \text{مه} - \frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{س}}{٢}\sqrt{٥} - \frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{س}}{٢}(\sqrt{٥} - ١)$

* وهومقدارضلع المعشر المنتظم السابق ايجاده بنمرة (١٧٧) وبناءعليه يكون أهـ هوضلع
* المخمس المنتظم كما ذكر
* تنبيه — بعد تقسيم المحيط الى خمسة أقسام متساوية اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين
* اثنتين فانه تتشكل ضرورة المخمس المنتظم النجمى ولحساب مقدار ضلعه أح (شكل ١٦٨)
* نصل القطر أب والمستقيم بح وهوضلع المعشر
* المنتظم المحدّب فالمثلث القائم الزاوية أحب يؤخذ منه

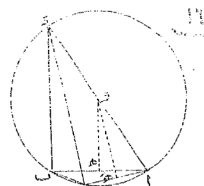
ش ١٦٨

* $\overline{\text{أح}}^{2} = \overline{\text{أب}}^{2} - \overline{\text{بح}}^{2}$
* غيرأن
* $\text{أب} = 2\,\text{س} \quad , \quad \text{حب} = \frac{\text{س}}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$
* فيكون
* $\overline{\text{أح}}^{2} = 4\,\overline{\text{س}}^{2} - \frac{\text{س}^{2}}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right)^{2} = 4\,\overline{\text{س}}^{2} - \frac{\text{س}^{2}}{4}\left(6 - 2\sqrt{5}\right)$
* $= \frac{\text{س}^{2}}{4}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$ أو $\text{أح} = \frac{\text{س}}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
* ويمكن التحقق من أن الضلع أح هو وترلمثلث قائم الزاوية ضلعاه الآخران هما نصف
* القطروضلع المعشر المنتظم النجمى
* وذلك لان مجموع مربعى ضلعى القائمة هو (١٧٧ تنبيه)
* $\text{س}^{2} + \frac{\text{س}^{2}}{4}\left(\sqrt{5} + 1\right)^{2} = \frac{\text{س}^{2}}{4}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)$
* ويكون مقداره اذن مساويا الى
* $\frac{\text{س}}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
* وهوعين المقدار الذى سبق الحصول عليه

دعوى عمليـــــــة

(١٧٩) المطلوب رسم الشكل ذى الخمسة عشرضلعا المنتظم المحدب داخل الدائرة (شكل ١٦٩) ليكن القوس أحب مساويا سدس المحيط أى ان وتره أب مساويا لنصف القطر وليكن القوس أح مساويا عشر المحيط أى ان وتره أح مساويا ضلع المعشر المنتظم المحدّب فيكون القوس بح معادلا ضرورة الى $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{1}{15}$ من محيط الدائرة ويكون وتره بح هوضلع الشكل ذوالخمسة عشرضلعا المنتظم المحدّب المرسوم داخل الدائرة

* نتيجة ١ — اذا وصل القطر اد والمستقيمان دب و دح ثم طبقت نظرية نمرة (١٤٥)
* على الشكل الرباعى احبد يحدث



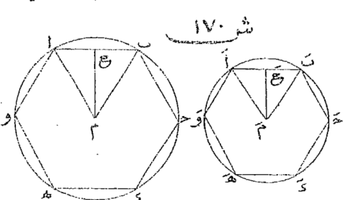
* اد × بح = با × دح — اح × دب
* و بجعل س رمزا لضلع الشكل ذى الخمسة عشر
* المنتظم يحدث
* $٢ نق س = نق × \frac{نق}{٢} \sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}}$
* $- \frac{نق}{٢} (\sqrt{٥} - ١) نق \sqrt{٣}$ أو
* $س = \frac{نق}{٤} \{ \sqrt{١٠ + ٢\sqrt{٥}} - \sqrt{١٥} + \sqrt{٣} \}$
* نتيجة ٢ — متى قسم المحيط الى خمسة عشر جزأ متساوية ووصلت نقط التقاسيم اثنين
* اثنين أو أربعا أربعا أو سبعا سبعا فانه يتكون من ذلك الاشكال الثلاثة المنتظمة النجمية
* ذوات الخمسة عشر ضلعا ويمكن حساب مقادير أضلاع كل واحد منها بواسطة خاصية الشكل
* الرباعى المرسوم داخل الدائرة الذى سبق استعماله غير أن هذه المقادير مرتبكة ولا فائدة فيها

الفصـــــل الثـانى

فى مقارنة المضلعات المنتظمة ببعضها

دعوى نظـــــرية

(١٨٠) النسبة بين محيطى الشكلين المنتظمين المتشابهين كالنسبة بين قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما أو داخلهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعات تلك الانصاف الاقطار (شكل ١٧٠)



اذا كان الشكلان المنتظمان المعلومان هما ابحدهو و اَبَحَدَهَوَ ونصفا قطرى الدائرتين المرسومتين خارجهما هما م ا و مَ اَ ونصفا قطرى الدائرتين المرسومتين داخلهما هما م ع و مَ عَ يقال

أولا ـ حيث ان الشكلين متشابهان يحدث

$$\frac{\text{محيط } ا ب ح ى هـ و}{\text{محيط } اَ بَ حَ ىَ هَ وَ} = \frac{ا ب}{اَ بَ}$$

وحيث ان كل واحد من المثلثين ا م ب و ا م ع يشابه نظيره من المثلثين اَ مَ بَ و اَ مَ عَ يحدث

$$\frac{ا ب}{اَ بَ} = \frac{ا م}{اَ مَ} = \frac{م ع}{مَ عَ}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{محيط } ا ب ح ى هـ و}{\text{محيط } اَ بَ حَ ىَ هَ وَ} = \frac{ا م}{اَ مَ} = \frac{م ع}{مَ عَ}$$

ثانيا ـ ينتج من تشابه الشكلين المنتظمين أن

$$\frac{\text{سطح } ا ب ح ى هـ و}{\text{سطح } اَ بَ حَ ىَ هَ وَ} = \frac{\overline{ا ب}^{2}}{\overline{اَ بَ}^{2}}$$

ومن المثلثات المتشابهة السابقة يؤخذ

$$\frac{\overline{ا ب}^{2}}{\overline{اَ بَ}^{2}} = \frac{\overline{ا م}^{2}}{\overline{اَ مَ}^{2}} = \frac{\overline{م ع}^{2}}{\overline{مَ عَ}^{2}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{سطح } ا ب ح ى هـ و}{\text{سطح } اَ بَ حَ ىَ هَ وَ} = \frac{\overline{ا م}^{2}}{\overline{اَ مَ}^{2}} = \frac{\overline{م ع}^{2}}{\overline{مَ عَ}^{2}}$$ وهو المراد

تعاريف

(١٨١) الكمية المتغيرة هي التي تأخذ على التوالي أحوالا مختلفة من المقادير ونهاية أي كمية متغيرة هي كمية ثابتة تقرب منها الكمية المتغيرة شيأ فشيأ بدون أن تبلغها

(١٨٢) يوجد في علمي الحساب والهندسة أمثال كثيرة للكميات المتغيرة والنهايات نمثل لك بأحدها فنقول

من المعلوم أن مقدار الزاوية في أي شكل منتظم عدد أضلاعه م هو $٢ق - \frac{٤ق}{م}$ (١٦٨)

فاذا فرض أن عدد أضلاع الشكل يأخذ فى الزيادة شيأ فشيأ الى غير نهاية فانه يشاهد ازدياد مقدار الزاوية شيأ فشيأ أيضا ومتى كان م عددا كبيرا جدا قرب الكسر $\frac{٤}{م}$ قربا كليا من الصفر وحينئذ فيه قرب مقدار الزاوية قربا كليا من القائمتين واذن تكون نهاية مقدار أى زاوية من الشكل المنتظم قائمتين

(١٨٣) من المعلوم أنه اذا كان للعوامل أَ و بَ و حَ نهايات هى ا و ب و ح كان نهاية الحاصل $أَ \times بَ \times حَ$ هى $ا \times ب \times ح$ أعنى أن نهاية حاصل ضرب عدة عوامل مساو لحاصل ضرب نهايات تلك العوامل

دعوى نظرية

(١٨٤) اذا رسم داخل دائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان فى عدد الاضلاع ثم ضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية فان محيطيهما يكون لهما نهاية مشتركة لا ترتبط بنفس المضلعين الاصليين ولا بالقانون الذى اتبع فى تضعيف عدد الاضلاع

فاذا كان ا ب ح ى ه . . . الخ المضلع المنتظم المرسوم خارج الدائرة ورمز لمحيطه بالحرف ع وكان أَ بَ حَ ىَ هَ . . . الخ المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومحيطه عَ ثم فرض تقسيم كل واحد من الاقواس أَبَ و بَحَ و حَىَ و . . . الخ الى أجزاء متساوية عددها ك ووصلت نقط التقاسيم المتوالية ببعضها ثم رسم مماسات من منتصفات الاقواس الجديدة فانه يتكون من ذلك كثيرا أضلاع منتظمان أحدهما يكون خارج الدائرة ويرمز لمحيطه بالحرف $ع_{١}$ وثانيهما يكون داخلها ويرمز لمحيطه بالحرف $عَ_{١}$ اذا تقرر هذا يقال

أوّلا — ان المحيط الجديد الخارج $ع_{١}$ أصغر من المحيط الخارج الاصلى ع بخلاف المحيطين الداخلين فان المحيط الجديد $عَ_{١}$ أكبر من المحيط الاصلى عَ وغير ذلك فان أىّ المحيطين الداخلين أصغر من أىّ المحيطين الخارجين

ومن هذا يعلم أن كل واحد من المحيطين ع و عَ يقرب من نهاية محدودة

ثم اذا رمزنا بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل ع و نقَ لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل عَ تحصل على مقتضى النظرية السابقة

$$\frac{ع}{نق} = \frac{عَ}{نقَ} = \frac{ع - عَ}{نق - نقَ} \quad أو \quad ع - عَ = \frac{ع(نق - نقَ)}{نق}$$

فاذا فرضنا الآن أن عدد الاضلاع فى كلا الشكلين أخذ فى الزيادة الى غير نهاية فان الكمية ح تأخذ فى الصغر شيأ فشيأ وكذا الكمية (س — سَ) فانها تأخذ فى التناقص أيضا وتقرب قربا كليا من الصغر وذلك لانه حيث كانت أضلاع كل شكل حادث داخل تزيد بعدا عن المركز عن أضلاع الشكل السابق فيزيد اذن مقدار سَ شيأ فشيأ وتكون نهايته هى س وبناء عليه فيقرب المقدار ح — حَ من الصغر ويكون للمحيطين نهاية مشتركة نرمز لها بحرف ۞

ثانيا — اذا نظرنا للشكلين المنتظمين الآخرين اللذين محيطاهما ح و حَ وفرضنا تضعيف عدد أضلاعهما الى غير نهاية واتبعنا فى ذلك قانونا غير الذى اتبعناه فى تضعيف عدد أضلاع الشكلين الاصليين وفرض انهما يقربان من نهاية مشتركة لهما ۞َ فانه يجب أن نبرهن على أن ۞ = ۞َ

ولذلك يقال حيث كانت ۞ هى النهاية التى يقرب منها ح الذى يفوق جميع المحيطات حَ فلا يمكن أن تكون أقل من النهاية ۞َ وهى نهاية المحيطات حَ وكذلك حيث كانت النهاية ۞َ نهاية للمحيطات ح التى تفوق جميع المحيطات حَ فلا يمكن أن تكون أقل من ۞ نهاية المحيطات حَ واذن فتكون ۞ = ۞َ

نتيجة ١ — النهاية المشتركة للمحيطين ح و حَ المرسومين خارج الدائرة وداخلها هى ماتسمى بمحيط الدائرة

نتيجة ٢ — ينتج مما تقدم أن طول محيط الدائرة هو دائما أقل من محيط أى شكل منتظم مرسوم خارجها وأكبر من محيط أى شكل منتظم مرسوم داخلها

نتيجة ٣ — يمكن تطبيق جميع البراهين التى سبق ذكرها على جزء من محيط دائرة بواسطة أن يرسم داخله وخارجه خطان منتظمان منكسران وحينئذ فنعتبر طول أى قوس النهاية المشتركة ۞ لطول خط منكسر منتظم متغير اما مرسوم داخل القوس أو خارجه متى ضوعف عدد أضلاعه الى غير نهاية

تنبيه — لا يمكن مقارنة طول قوس من منحن بطول خط مستقيم بل ولا يمكن أن يقال ان أحدهما أكبر من الآخر ولهذا قد التزمنا عند مقارنته بالخط المستقيم تعديل طول الخط المنحنى

دعوى نظـــرية

(١٨٥) اذا رسم داخل الدائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان فى عدد الاضلاع وضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية فان سطحيهما يكون لهما نهاية مشتركة هى سطح الدائرة (شكل ١٦٢)

فاذا رمزنا بالرمزين س و $\text{س}'$ لسطحى الشكلين المرسومين خارج الدائرة وداخلها ثم قسم كل واحد من الاقواس $\text{أب}'$ و $\text{ب}'\text{ح}'$ و $\text{ح}'\text{د}'$ و ... الخ الى أقسام متساوية عددها ك ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمات ثم رسم مماسات من نقط أواسط الاقواس الجديدة فانه يتكون من ذلك شكلان منتظمان أحدهما $\text{س}_{١}$ خارج الدائرة وثانيهما $\text{س}'_{١}$ داخلها ثم اذا استمر فى تقسيم الاقواس الحادثة فاننا ننتقل من الشكلين $\text{س}_{١}$ و $\text{س}'_{١}$ الى $\text{س}_{٢}$ و $\text{س}'_{٢}$ ومن $\text{س}_{٢}$ و $\text{س}'_{٢}$ الى $\text{س}_{٣}$ و $\text{س}'_{٣}$ وهكذا

ولما كان كل سطح من سطوح الاشكال الخارجة أكبر من سطح الدائرة لاشتماله عليه وكل سطح من سطوح الاشكال الداخلة أقل من سطح الدائرة لانحصاره فيه وانه كلما ضوعف فى عدد الاضلاع فان سطوح الاشكال الخارجة تتناقص وسطوح الاشكال الداخلة تتزايد فلابد اذن من أن نجزم بان السطوح س و $\text{س}_{١}$ و $\text{س}_{٢}$ و $\text{س}_{٣}$ و ... الخ تتقارب شيأ فشيأ من نهاية وكذلك السطوح $\text{س}'$ و $\text{س}'_{١}$ و $\text{س}'_{٢}$ و $\text{س}'_{٣}$ و ... الخ لكنه بناء على ما تقرر بنظرية نمرة ١٨٠ يحدث

$$\frac{\text{س}}{\text{نق}^{٢}} = \frac{\text{س}'}{\text{نق}'^{٢}} = \frac{\text{س} - \text{س}'}{\text{نق}^{٢} - \text{نق}'^{٢}} \quad \text{أو}$$

$$\text{س} - \text{س}' = \frac{\text{س}\,(\text{نق}^{٢} - \text{نق}'^{٢})}{\text{نق}^{٢}} = \frac{\text{س}\,(\text{نق} + \text{نق}')\,(\text{نق} - \text{نق}')}{\text{نق}^{٢}}$$

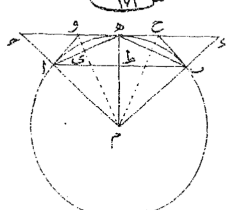
ومن ذلك يعلم انه كلما زيد فى تضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية فان الفرق $(\text{س} - \text{س}')$ يصير كمية صغيرة جدا وبناء عليه فنهاية السطح س هى عين نهاية السطح $\text{س}'$ ولما كان سطح الدائرة محصورا دائما بين هذين السطحين فيكون هو تلك النهاية المشتركة

نتيجة — لا يمكن مقارنة سطح الدائرة مباشرة بسطح المربع المعتبر وحدة لانحناء الدائرة غير أنه بواسطة النظرية المتقدمة يتيسر لنا ذلك بان نأخذ مساحة الشكلين المذكورين ونبحث عن النهاية التى يقربان منها متى ضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية

دعوى عمليـــــــة

(١٨٦) اذا علم محيطا شكلين منتظمين ح و $\text{ح}'$ عدد أضلاع كل واحد منهما ن وكان أحدهما مرسوما خارج الدائرة والثانى داخلها والمطلوب حساب محيطى الشكلين $\text{ح}_{١}$ و $\text{ح}'_{١}$

المنتظمين المرسومين خارج الدائرة وداخلها وعدد أضلاع كل منهما $٢ن$ (شكل ١٧١)



لكن حد و اب ضلعين متناظرين من الشكلين المعلومين بحيث ان

$$ح = ن \times حد = ٢ن \times حه \quad و$$

$$ح' = ن \times اب = ٢ن \times اط$$

فنصل اه و هب ونرسم المماسين او و ب ح فيحدث

$$ح_١ = ٢ن \times حو = ٤ن \times هو \quad , \quad ح'_١ = ٢ن \times اه = ٤ن \times ىه$$

اذا تقرر هذا يقال

أولا — حيث كان مو منصف الزاوية حمه يحدث

$$\frac{وه}{مه} = \frac{وح}{مح} \quad \text{غير ان} \quad \frac{ح'}{مه} = \frac{ح}{مح} \quad \text{فيحدث}$$

$$\frac{وه}{ح'} = \frac{وح}{ح} = \frac{حه}{ح+ح'} \quad \text{أو} \quad \frac{٤ن\, وه}{ح'} = \frac{٤ن\, حه}{ح+ح'} \quad \text{أو} \quad \frac{ح_١}{ح'} = \frac{٢ح}{ح+ح'}$$

ومن هذا يحدث $ح_١ = \frac{٢ح ح'}{ح+ح'}$

ثانيا — يؤخذ من المثلثين القائمي الزاوية المتشابهين وهى و ه ا ط أن

$$\frac{ىه}{اط} = \frac{وه}{اه} \quad \text{أو} \quad \frac{٤ن \times ىه}{٢ن \times اط} = \frac{٤ن \times وه}{٢ن \times اه} \quad \text{أو} \quad \frac{ح'_١}{ح'} = \frac{ح_١}{ح'_١}$$

ومنه $ح'^{٢}_{١} = ح' ح_١$ أو $ح'_١ = \sqrt{ح' ح_١}$ وهو المطلوب .

* نتيجة — الارتباطان السابقان يسهلان اذا اعتبرنا بدل المحيطين عكسيهما أعني ان

$$* \quad \frac{١}{ح_١} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{ح} + \frac{١}{ح'}\right) \quad , \quad \frac{١}{ح'_١} = \sqrt{\frac{١}{ح_١} \times \frac{١}{ح'}}$$

* وحينئذ اذا وضعنا لاجل الاختصار $ا = \frac{١}{ح}$, $ا' = \frac{١}{ح'}$ و $ا_١ = \frac{١}{ح_١}$, $ا'_١ = \frac{١}{ح'_١}$

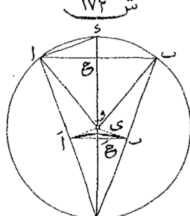
* يحدث

$$* \quad ا_١ = \frac{١}{٢}(ا + ا') \quad , \quad ا'_١ = \sqrt{ا_١ ا'}$$

* وتسهل البرهنة بواسطة الاعمال الحسابية على ان $ا'_١ - ا_١ < \frac{١}{٤}(ا' - ا)$

دعوى عمليـــــــــة

(١٨٧) اذا علم س و $\text{س}'$ نصفاقطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل شكل منتظم والمطلوب ايجاد مقدارى س_1 و $\text{س}'_1$ لشكل آخر منتظم متحد مع الاول فى طول المحيط ومضاعف له فى عدد الاضلاع (شكل ١٧٢)



ليكن ا ب ضلع المضلع المعلوم , $\text{س} = \text{او} = \text{وى}$ نصف قطر الدائرة الخارجة و $\text{س}' = \text{وع}$ نصف قطر الدائرة الداخلة

فنمد و ع على استقامته حتى يلاقى المحيط فى نقطة ح ثم نصل اح و ب ح وننزل على هذين الوترين العمودين وأَ و وبَ فالمستقيم أَ بَ يعادل نصف اب ضرورة وحينئذ فيكون هو ضلع الشكل المتحد مع الاول فى طول المحيط والمضاعف له فى عدد الاضلاع وحيث ان زاوية ا ح ب نصف زاوية ا و ب فيمكن اعتبار نقطة ح مركزا لهذا الشكل الجديد ويكون $\text{س}_1 = \text{حأ}'$ و $\text{س}'_1 = \text{حع}'$

اذا تقرر هذا يقال

أولا ـ حيث ان نقطة عَ كائنة فى وسط ح ع أى ان $\text{حع}' = \frac{1}{2}\,\text{حع}$ يكون

$$\text{س}'_1 = \frac{\text{حو} + \text{وع}}{2} = \frac{1}{2}(\text{س} + \text{س}')$$

ثانيا ـ يؤخذ من المثلث القائم الزاوية و أَ ح ان

$$\overline{\text{حأ}'}^{2} = \text{وح} \times \text{ع}'\text{ح} = \text{س}\,\text{س}'_1 \quad \text{أو} \quad \text{س}_1 = \sqrt{\text{س}\,\text{س}'_1}$$

وهو المطلوب ايجاده

نتيجة ـ اذا جعلت نقطة ح مركزا ورسم قوس من محيط دائرة بنصف قطر مساو حأَ ووصل أَ ى فيكون هذا المستقيم منصفا الزاوية و أَ ح ويحدث $\frac{\text{ىع}'}{\text{ىو}} = \frac{\text{أ}'\text{ع}'}{\text{أ}'\text{و}}$ لكنه حيث كان $\text{أ}'\text{ع}' < \text{أ}'\text{و}$ فيكون $\text{ىع}' < \text{ىو}$ أعنى ان نقطة ى أكثر قربا من نقطة عَ عن المركز و واذن يكون

$$\text{ىع}' < \frac{1}{2}\,\text{وع}' \quad \text{أو ان} \quad \text{س}_1 - \text{س}'_1 < \frac{1}{2}\,\text{وع}'$$

غيران المثلثين المتشابهين د أ ح و أَ حَ يؤخذ منهما ان ع َ = ½ د ع فيكون اذن

$$ب_٢ - ب_١َ < \frac{١}{٤}(س - سَ)$$

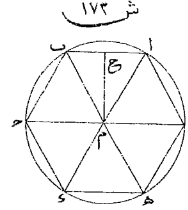
* تنبيه - يشاهد ان القانونين اللذين يتوصل منهما الى المقدارين ب_٢ و ب_١َ بدالة س و سَ
* هما عين القانونين اللذين يتوصل بهما الى إ و إَ بدالة ا و اَ (١٨٦)

الفصـــــل الثـالث

فى قياس محيط الدائـــــرة ومساحتها

دعوى نظـــــرية

(١٨٨) مساحة الشكل المنتظم تساوى حاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٧٣)



لانه اذا وصل من المركز م الى جميع رؤس الشكل ا ب ح د ه و بمستقيمات م ا و م ب و م ح و م د و ... الخ فانه ينقسم الى المثلثات ا م ب و ب م ح و ح م د و ... الخ المتحدة جميعها فى القاعدة والارتفاع فاذا ضمت هذه المساحة على بعضها فانه يتوصل الى المساحة المطلوبة

أعنى يكون

$$س = ٦ \times اب ح = ٦ \times اب \times \frac{م ع}{٢} = ع \frac{سَ}{٢}$$

دعوى نظـــــرية

(١٨٩) النسبة بين محيطى الدائرتين كالنسبة بين نصفى قطريهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى نصفى القطرين

أولا - نرسم داخل الدائرتين شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع ونرمز لمحيطيهما بالحرفين ع و عَ ولنصفى قطرى الدائرتين بالرمزين س و سَ فعلى مقتضى ماتقرر بنمرة (١٨٠) يحدث $\frac{ع}{عَ} = \frac{س}{سَ}$

وحيث ان هذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضلاع الشكلين فانه ينطبق أيضاً على محيطى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما و يحدث

$$\frac{\text{محيط نق}}{\text{محيط نقَ}} = \frac{\text{نق}}{\text{نقَ}} \qquad (1)$$

ثانيا — اذا رمز لسطحى الشكلين بالرمزين س و سَ تحصل أيضاً بمقتضى نظرية (١٨٠) أن

$$\frac{\text{س}}{\text{سَ}} = \frac{\text{نق}^{2}}{\text{نقَ}^{2}}$$

وحيث ان هذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضلاع الشكلين فينطبق أيضاً على سطحى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما و يحدث

$$\frac{\text{سطح نق}}{\text{سطح نقَ}} = \frac{\text{نقَ}}{\text{نقَ}^{2}}$$

تنبيــــه — يؤخذ من الارتباط (١) أن

$$\frac{\text{محيط نق}}{2\,\text{نق}} = \frac{\text{محيط نقَ}}{2\,\text{نقَ}} = \text{ط}$$

أعنى أن النسبة الكائنة بين أى محيط دائرة وقطره ثابتة دائماً و يرمز لها عادة بحرف ط وهو مقدار غير منطق أى لا يمكن ايجاد مقداره الا على وجه التقريب

ومعرفة النسبة ط يتوصل بها دائماً الى ايجاد طول محيط دائرة نصف قطرها معلوم لانه يؤخذ من المتساوية

$$\frac{\text{محيط نق}}{2\,\text{نق}} = \text{ط} \quad \text{ان المحيط} = 2\,\text{ط نق}$$

أعنى أن طول المحيط مساو لحاصل ضرب النسبة فى القطر

دعوى نظـــــــرية

(١٩٠) مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب طول محيطها فى ربع قطرها

اذا رسم داخل الدائرة شكل منتظم محيطه ح وسطحه س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله نقَ فان مساحته تكون مساوية الى $\text{ح} \times \frac{\text{نقَ}}{2}$

وحيث ان هذا القانون حقيقى مهما كان عدد أضلاع الشكل فيكون حقيقياً أيضاً للدائرة التى هى نهاية له واذن يكون

$$\text{نهـ}\,\text{اس} = \text{نهـ}\,(ع \times \frac{س}{٢}) = \text{نهـ}\,ع \times \text{نهـ}\,\frac{س}{٢} \quad \text{أو سطح الدائرة} = مح \times \frac{س}{٢}$$

و يتوصل الى عين هذا الناتج بواسطة الشكل المرسوم خارج الدائرة

نتيجة - ينتج من هذا القانون انه لاخذ مساحة الدائرة يحتاج الحال الى معرفة طول محيطها لكنه اذا وضع ٢ ط س بدل المحيط يحدث سطح الدائرة = ط س٢

دعوى نظرية

(١٩١) مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب طول قوسه فى ربع قطر دائرته

لذلك نرمز بالحرف هـ لزاوية القطاع مقدرة بالدرج فمن حيث ان النسبة بين أى قطاع والدائرة التى هو جزء منها هى عين النسبة بين قوسه ومحيطها أو بين زاويته وأربع قوائم يحدث

$$\frac{\text{قطاع هـ}}{\text{دائرة س}} = \frac{هـ}{٣٦٠^\circ} \quad \text{أو} \quad \text{قطاع هـ} = \frac{هـ}{٣٦٠^\circ} \times ط\,س^٢$$

وهذا قانون أول لمساحة القطاع

لكنه للوصول الى القانون الذى يطلبه المنطوق نستعوض مساحة الدائرة بمقدارها فيحدث

$$\text{قطاع هـ} = \frac{هـ}{٣٦٠^\circ} \times \text{محيط س} \times \frac{س}{٢}$$

غير أن $\frac{هـ}{٣٦٠}$ × محيط س هو مقدار طول القوس الذى زاويته هـ كما هو معلوم فيكون

$$\text{قطاع هـ} = \text{قوس هـ} \times \frac{س}{٢}$$

دعوى نظرية

(١٩٢) مساحة القطعة تساوى حاصل ضرب ربع قطر الدائرة فى الفرق الكائن بين قوسها و بين نصف وتر قوس ضعفه (شكل ١٧٤)

وللبرهنة على ذلك يقال من المعلوم ان القطعة أ ح ب عبارة عن الفرق الكائن بين القطاع وأ ح ب وبين المثلث و ا ب أعنى ان

$$\text{قطعة أ ح ب} = \text{قطاع و أ ح ب} - \text{مثلث و ا ب}$$

غيرأن مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب قوسه فى ربع قطر الدائرة وأما المثلث و ا ب فانه يمكن اعتبار قاعدته و ب وأما ارتفاعه فهو العمود النازل من نقطة ا على و ب الذى هو عبارة عن نصف وتر قوس ضعف القوس ا ح ب فاذا رمز له بالحرف ل يحدث

ش ١٧٤

قطعة ا ح ب = قوس ا ح ب × نق/٢ — نق × ل/٤

أو

قطعة ا ح ب = نق/٢ (قوس ا ح ب — ١/٢ ل)

تنبيـــه — مقدار طول الوتر لا يمكن تعيينه بواسطة المسطرة والبرجل الا اذا كان أحد أضلاع شكل من الاشكال التى يمكن رسمها داخل الدائرة وفى الاحوال الاخر فانه يستعان على تعيينه بواسطة جداول اللوغاريتمات

دعوى عمليـــــــــة

(١٩٣) المطلوب تعيين مقدار النسبة التقريبية ط بين محيط الدائرة وقطرها

يتوصل بالقانونين محيط نق = ٢ ط نق ودائرة نق = ط نق٢ الى أربعة طرق مختلفة لتعيين مقدار ط وهى

أوّلا — اذا علم طول المحيط ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر

ثانيا — اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لطول المحيط

ثالثا — اذا علم سطح الدائرة ويطلب تعيين مقدار التقريبي لنصف القطر

رابعا — اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لسطح الدائرة

وسنتكلم هنا على الطريقتين الاولين فقط تدريجا فنقول

الطريقة الاولى المعروفة بطريقة المحيطات المتحدة فى الطول

(١٩٤) اذا علم طول المحيط وكان المطلوب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر س يقال اذا كان طول المحيط مساويا ٢ حدث ٢ = ٢ط س ومنه س = ١/ط

واذن فيكون مقدار نصف القطر هو عكس مقدار ط

فاذا أنشئ شكل منتظم كيفما اتفق بحيث يكون محيطه مساويا ٢ وكان نق و نقَ نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارجه وداخله فان محيط الدائرة الذى نصف قطره نق يكون طوله

أكبر من ٢ ضرورة كان محيط الدائرة الذى نصف قطره $س'$ أقل من ٢ وحينئذ فيكون $س$ محصورا بين $س$ و $س'$

فاذا انتقلنا الآن من هذا الشكل المنتظم الى آخر متحد معه فى الطول ومضاعف له فى عدد الاضلاع نجد أن $س$ محصور بين $س_1$ و $س'_1$ ويمكن الاستمرار على ذلك الى غير نهاية

وحيث انه قد شوهد بنمرة (١٨٧) ان الفرق $س - س'$ يأخذ فى الصغر كلما زيد فى تضعيف عدد أضلاع الاشكال المتحدة فى الطول ويكون نهايته الصغر وحينئذ فيمكن الوصول الى عددين ينحصر بينهما $س$ لا يفترقان عن بعضهما الا بمقدار يسير جدا وبذلك يتعين مقدار $\frac{1}{ط}$ مع درجة التقريب المطلوبة

فاذا اعتبرنا الشكل المنتظم انه هو المربع الذى ضلعه $\frac{1}{٢}$ تحصل $س' = \frac{1}{٤}$ و $س = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$

ثم اذا جعلنا هذين المقدارين مبدأ للاعمال واستخرجنا على التوالى مع التعاقب الوسط المتناسب العددى والوسط المتناسب الهندسى للعددين المذكورين كما ذكر بنمرة (١٨٧) فانا نتوصل الى مقادير

$$(س'_1 \text{ و } س_1) \text{ و } (س'_٢ \text{ و } س_٣) \text{ و } (س'_٣ \text{ و } س_٣) \text{ و } \ldots \text{ وهكذا}$$

ومتى توصل الى مقدارى نصفى قطرين مثل ($س'_ن$ و $س_ن$) مشتركين فى الخانات العشرة الاول مثلا فانه يمكن أخذ أحدهما أو الآخر لمقدار $س$ أو لمقدار $\frac{1}{ط}$ مقربا بأقل من واحد من الخانة الحادية عشرة الاعشارية

ولنلاحظ الآن انه اذا كتب العددان ٠ و $\frac{1}{٢}$ وأخذ الوسط المتناسب العددى بينهما ثم أخذ الوسط المتناسب الهندسى بين العددين الاخيرين تحصل $\frac{1}{٤}$ و $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$

وحينئذ فيمكن ايراد هذه النظرية

نظرية — اذا كتب العددان ٠ و $\frac{1}{٢}$ وأخذ بدون انقطاع مع التعاقب الوسط الحسابى والهندسى للعددين الاخيرين فانه يتكون من ذلك سلسلة نواتج تقرب مقاديرها قربا كليا من $\frac{1}{ط}$ ويكون هذا المقدار محصورا دائما بين أى ناتجين متواليين

في حساب $\frac{١}{ط}$ مقربا بأقل من $\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠٠}$

عدد الاضلاع	سَ	س
٤	٠ر٢٥٠٠٠٠٠	٠ر٣٥٣٥٥٣٤
٨	٠ر٣٠١٧٧٦٧	٠ر٣٢٦٦٤٠٥
١٦	٠ر٣١٤٢٠٨٦	٠ر٣٢٠٣٦٤٤
٣٢	٠ر٣١٧٢٨٦٥	٠ر٣١٨٨٢١٨
٦٤	٠ر٣١٨٠٥٤١	٠ر٣١٨٤٣٧٨
١٢٨	٠ر٣١٨٢٤٥٩	٠ر٣١٨٣٤١٨
٢٥٦	٠ر٣١٨٢٩٣٩	٠ر٣١٨٣١٧٨
٥١٢	٠ر٣١٨٣٠٥٩	٠ر٣١٨٣١١٨
١٠٢٤	٠ر٣١٨٣٠٨٩	٠ر٣١٨٣١٠٣
٢٠٤٨	٠ر٣١٨٣٠٩٦	٠ر٣١٨٣٠٩٩
٤٠٩٦	٠ر٣١٨٣٠٩٨	٠ر٣١٨٣٠٩٨

تنبيــه — يجب لاجراء هذا الحساب مع السرعة والضبط

أولا — استعمال عمليات الضرب المختصرة

ثانيا — أن يتذكر عند استخراج الجذر التربيعي لاى عدد الاعتماد على أرقام اعشارية من ناتج الجذر بقدر ما في العدد المفروض من الارقام الحقيقية

ثالثا — أن يتذكر أن الفرق بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي أقل من الفرق بين العددين مقسوما على ثمانية أمثال الاصغر وبناء عليه فيمكن استعواض المتوسط الهندسي بالمتوسط الحسابي عندما يشترك س و سَ في ثلاثة أرقام أعشارية

الطريقة الثانية المعروفة بطريقة المحيطات

(١٩٥) اذا علم نصف القطر وأريد ايجاد مقدار طول محيط الدائرة التقريبي

اذا فرض أن مقدار نصف القطر هو $\frac{١}{٢}$ يكون طول المحيط مساويا ط ويكون عكس طوله هو $\frac{١}{ط}$ فاذا انشئ في هذه الحالة مربع داخل الدائرة وآخر خارجها تحصل

$$ع = ٤ \text{ ، } عَ = ٢\sqrt{٢} \quad \text{ويكون} \quad \frac{١}{ع} = \frac{١}{٤} \text{ ، } \frac{١}{عَ} = \frac{\sqrt{٢}}{٤}$$

وحيث ان المحيط محصور بين ح و حَ فيكون $\frac{1}{ط}$ محصورا بين $\frac{1}{ح}$ و $\frac{1}{حَ}$
فاذا ضوعف عدد الاضلاع شيأ فشيأ فانه يتوصل الى أشكال عدد أضلاعها ٨ و ١٦ و ٣٢
والخ وبمقتضى ما تقرر بنمرة (١٨٦) يتوصل الى مقادير الكميات ($\frac{1}{ح}$ و $\frac{1}{حَ}$) و
($\frac{1}{ح_1}$ و $\frac{1}{حَ_1}$) و ($\frac{1}{ح_2}$ و $\frac{1}{حَ_2}$) وهكذا التى تقرب تدريجيا من الكمية $\frac{1}{ط}$
ونشاهد أن الاعمال الحسابية التى توصلنا اليها بهذه الطريقة مطابقة لاعمال الطريقة الاولى

تنبيه — لما كان مقدار ط غير منطق قد اعتنى بعض الحسابيين الصابرين فى تعيين مقدار عظيم جدا من أرقامه الاعشارية وقد علم منه للآن ٥٠٠ رقم بحيث أن

$$ط = ٣٫١٤١٥٩\ ٢٦٥٣٥\ ٨٩٧٩٥\ ٢٣٨٤٦ \ldots\ldots \quad و$$

$$\frac{1}{ط} = ٠٫٣١٨٣٠\ ٩٨٨٦١\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

وقد بحث (ارشميدس) أقدم المؤلفين فى النسبة الكائنة بين المحيط وقطره فوجد أنها محصورة بين

$$٣\frac{١٠}{٧١} \quad و \quad ٣\frac{١٠}{٧٠} = ٣\frac{١}{٧} = \frac{٢٢}{٧}$$

والمقدار الاخير مقبول لبساطته و يتحصل منه رقمان أعشاريان حقيقيان
وأما (ادريان متيوس) فقد وجد لهذه النسبة المقدار $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ و يتحصل منه ستة أرقام أعشارية حقيقية

ومما يجعل هذا المقدار مفيدا خاصيته الموجبة لحفظه عقلا حيث انك لو كتبت على التوالى كل رقم من الارقام الثلاثة الاول الفردية وهى ٥ و ٣ و ١ مرتين أحدهما بجانب الآخر بأن تحصل ١١٣٣٥٥ فان الارقام الثلاثة الاول من جهة الشمال تدل على القطر والثلاثة الأخر تدل على المحيط و بتحويله الى كسر اعشارى يتحصل منه ٣٫١٤١٥٩٢٩
غير أن مقدار نسبة أرشيمدس كاف غالبا فى الاعمال

* نتيجة — مسئلة تربيع الدائرة يمكن أن يعبر عنها كما يأتى
* المطلوب رسم مربع يكافئ دائرة معلومة بواسطة المسطرة والبرجل
* فيشاهد على مقتضى ما تقرر فى النظريات المتقدمة أن ضلع المربع المجهول يكون وسطا متناسبا
* بين طول محيط الدائرة وربع قطرها و كان يمكن حل هذه المسئلة لو تيسر بواسطة المسطرة والبرجل
* رسم مستقيم بطول محيط الدائرة غير أن معلومية مقدار ط بدرجة التقريب الكافية تسمح
* بتعديل طول المحيط مع التقريب لكنه لا يعلم الى الآن طريقة عملية لذلك ولم يقم دليل باستحالة
* اجراء مثل هذه الطريقة

وعدم امكان ايجاد المقدار الحقيقى للكمية ط بعدد كسرى ليس هو السبب فى عدم الامكان المطلق فى تعديل محيط الدائرة حيث انه يمكن رسم المقادير ا$\sqrt{٢}$ و ا$\sqrt{٣}$ و ا$\sqrt{٥}$ و ... الخ بواسطة المسطرة والبرجل مع أن $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$ و $\sqrt{٥}$ و ... كميات غير منطقة

الفصل الرابع

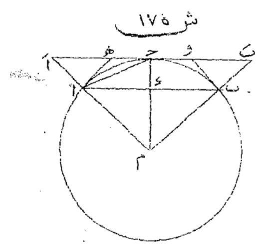
فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمضلعات المنتظمة

دعوى عملية

(١٩٦) اذا علم أحد أضلاع شكل منتظم مرسوم داخل دائرة والمطلوب ايجاد مقدار ضلع الشكل المنتظم المشابه للاول المرسوم خارج الدائرة (شكل ١٧٥) وبالعكس

أولا — اذا كان اَ = اب معلوما وكان المطلوب ايجاد ا = اَبَ يقال

يؤخذ من المثلثين م اَبَ و م اب المتشابهين أن



$$\frac{\bar{ا}}{ا} = \frac{مح}{مء} = \frac{س}{\sqrt{س^2 - \frac{ا^2}{٤}}}$$

وحينئذ يكون

$$ا = س \frac{\bar{ا}}{\frac{1}{٢}\sqrt{٤س^2 - \bar{ا}^2}} \quad أو$$

$$ا = س \frac{٢\left(\frac{\bar{ا}}{س}\right)}{\frac{\sqrt{٤س^2 - \bar{ا}^2}}{س}} = س \frac{٢\left(\frac{\bar{ا}}{س}\right)}{\sqrt{٤ - \left(\frac{\bar{ا}}{س}\right)^2}}$$

ثانيا — اذا كان المعلوم هو ا = اَبَ والمطلوب ايجاده هو اَ = اب يقال

يؤخذ من نفس المثلثين المتشابهين أن

$$\frac{\bar{ا}}{ا} = \frac{مء}{مح} = \frac{س}{\sqrt{س^2 + \frac{ا^2}{٤}}} \quad أو \quad \bar{ا} = س \frac{٢\left(\frac{ا}{س}\right)}{\sqrt{٤ + \left(\frac{ا}{س}\right)^2}}$$

نتيجة ١ — اذا أريد ايجاد ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم خارج الدائرة يقال

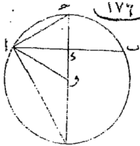
من المعلوم أن اَ = س $\sqrt{٣}$ وحينئذ يكون المقدار المطلوب مبينا بالقانون

$$ا = س \frac{٢\sqrt{٣}}{\sqrt{٤ - ٣}} = ٢س\sqrt{٣}$$

* أعنى أن مقدار ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم خارج الدائرة هو ضعف مقدار الضلع
* نظيره من المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها وهذا أمر يظهر أيضا من الرسم اذا
* تذكرنا أن العمود النازل من المركز على ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
* مساو ربع قطرها
* نتيجة ٢ — اذا أريد ايجاد ضلع المسدس المنتظم المرسوم خارج الدائرة يقال ان $\bar{ا}$ فى هذه
* الحالة مساو س ويحدث $ا = \frac{٢ س}{\sqrt{٣}} = \frac{٢}{٣} س \sqrt{٣}$ ويمكن ايراد أمثلة كثيرة تطبيقا
* على القانونين المتقدمين

دعوى عمليـــــــة

* (١٩٧) اذا علم ضلع من شكل منتظم مرسوم داخل دائرة والمطلوب حساب ضلع الشكل
* المنتظم المرسوم داخلها أيضا والمضاعف للاول فى عدد الاضلاع وبالعكس (شكل ١٧٦)



* أولا — اذا كان المعلوم هو ا = اب , س = او وأن
* المطلوب ايجاده هو $\bar{ا}$ = اح يقال
* نمد القطر حوه ونصل اه فيتكون من ذلك المثلث
* احه القائم الزاوية فيه اح وسط متناسب بين القطر حه
* والسهم حء المجاور له أعنى أن

$$\bar{ا}^{٢} = ٢ س \times حء = ٢ س (س - ءو) = ٢ س \left(س - \sqrt{س^{٢} - \frac{ا^{٢}}{٤}}\right)$$

* أو

$$\bar{ا}^{٢} = ٢ س \left(س - \sqrt{\frac{س^{٢}}{٤}\left(٤ - \left(\frac{ا}{س}\right)^{٢}\right)}\right)$$

* أو

$$\bar{ا}^{٢} = ٢ س^{٢} - س^{٢} \sqrt{٤ - \left(\frac{ا}{س}\right)^{٢}} = س^{٢}\left(٢ - \sqrt{٤ - \left(\frac{ا}{س}\right)^{٢}}\right)$$

* أو

$$\bar{ا} = س \sqrt{٢ - \sqrt{٤ - \left(\frac{ا}{س}\right)^{٢}}}$$

* ثانيا — اذا كان المعلوم هو $\bar{ا}$ = اح , س = او والمطلوب ايجاده هو ا = اب يقال
* اذا طبقنا نظرية نمرة (١٤٥) على الشكل الرباعى اهبح يحدث

$$٢ س ا = ٢ \bar{ا} \times اه = ٢ \bar{ا} \sqrt{٤ س^{٢} - \bar{ا}^{٢}} \quad \text{أو} \quad ا = س \frac{\bar{ا}}{س} \sqrt{٤ - \left(\frac{\bar{ا}}{س}\right)^{٢}}$$

* ومع ذلك فانه كان يمكن استنتاج هذا القانون من السابق

* نتيجة ١ — اذا أريد ايجاد مقادير أضلاع الاشكال المنتظمة التي عدد أضلاعها هي على
* التعاقب ٨ و ١٦ و ٣٢ و ... الخ يقال
* نضع أولاً في القانون الاول $١ = س \sqrt{٢}$ فيحدث $\overline{١} = س \sqrt{٢ - \sqrt{٢}} = ١_{٨}$ وهو
* مقدار ضلع المثمن المنتظم ثم اذا وضعنا هذا المقدار بدل ١ في القانون المذكور يحدث

$$١_{١٦} = س \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢}}}$$

* ومع الاستمرار على ذلك يتوصل الى

$$١_{٣٢} = س \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢}}}} \quad \text{وهكذا}$$

* وعلى العموم فان

$$١_{٢^ن} = س \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + ...}}}}}$$

* بحيث يكون عدد علامات الجذر مساويا ن — ١ ويكون طول محيط هذا الشكل مساويا الى

$$ح_{٢^ن} = س ٢^ن \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢}}} ...$$

* و بقسمة الطرفين على ٢ س فانا نحصل على مقدار ط وهو

$$٢^{ن-١} \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + ...}}}}$$

* وعدد علامات الجذر الداخلة في هذا المقدار هو ن — ١ واذن فيمكن ان يكتب

$$ط = ٢^ن \sqrt{٢ - \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + \sqrt{٢ + ...}}}}$$

* ويكون عدد علامات الجذر مساويا ن
* نتيجة ٢ — وبمثل ما ذكر يتوصل الى مقادير أضلاع الاشكال المنتظمة التي عدد
* أضلاعها ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٩٦ وهكذا

دعوى عمليـــــــة

* (١٩٨) اذا علم نصف قطر الدائرة وضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها والمطلوب ايجاد
* مقدار ضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها المضاعف للاول في عدد الاضلاع و بالعكس
* (شكل ١٧٤)

* أولا — اذا كان المعلوم هو $\bar{أ ب} = أ$ ، $وح = س$ والمطلوب ايجاده هو
* $ه\bar{ه} = \bar{أ}$ يقال
* حيث ان المستقيم وه منصف للزاوية أوح يحدث

* $$\frac{هح}{وح} = \frac{ه\bar{أ}}{و\bar{أ}} = \frac{هح + ه\bar{أ}}{وح + و\bar{أ}} \quad أو \quad \frac{\frac{1}{2}\bar{أ}}{س} = \frac{\frac{1}{2}أ}{س + \sqrt{س^2 + \frac{أ^2}{4}}}$$

* ومع الاختصار يحدث

* $$\bar{أ} = س \frac{2\left(\frac{أ}{س}\right)}{2 + \sqrt{4 + \left(\frac{أ}{س}\right)^2}}$$

* ويمكن تغيير هذا المقدار بآخر يكون مقامه خاليا من علامة الجذر وهو

* $$\bar{أ} = 2س \frac{\sqrt{4 + \left(\frac{أ}{س}\right)^2} - 2}{\left(\frac{أ}{س}\right)}$$

* ثانيا — اذا كان المعلوم هو $\bar{أ}$ ، س والمطلوب ايجاده هو أ يقال
* يتوصل من القوانين المتقدمة التي حلت بالنسبة الى أ أن

$$أ = س \frac{8\left(\frac{\bar{أ}}{س}\right)}{4 - \left(\frac{\bar{أ}}{س}\right)^2}$$

* نتيجة — يمكن أن يستنتج من القانون الاول تمرينا على ما تقدم مقادير أضلاع الاشكال
* المنتظمة المرسومة خارج الدائرة التي عدد أضلاعها هي

* ٨ و ١٦ و ٣٢ و ... الخ و ٦ و ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ... الخ

دعوى عمليــــــة

* (١٩٩) اذا علم سطحا شكلين منتظمين متشابهين أحدهما مرسوم خارج الدائرة والثانى
* داخلها والمطلوب ايجاد سطحى الشكلين المنتظمين المضاعفين للاولين فى عدد الاضلاع
* والمرسومين خارج الدائرة وداخلها (شكل ١٧٥)

* ليكن أب ضلع الشكل المنتظم المرسوم داخل الدائرة و $\bar{أ ب}$ الضلع المناظر له من الشكل
* المنتظم المرسوم خارج الدائرة عدد أضلاع كل واحد منهما ن فيكون أج هو ضلع الشكل

* المضاعف الداخل و هـ و ضلع الشكل المضاعف الخارج ثم اذا رمز بالحرفين ا و اَ
* لمساحتي الشكلين المعلومين و إ و إَ لمساحتي الشكلين المطلوبين يحدث

* اَ = ٢ن × م اَ ح ، ا = ٢ن × م ا ء ،

* إَ = ٤ن × م هـ ح ، إ = ٢ن × م ا ح

* اذا تقرر هذا يقال

* أولا ـ يؤخذ من المثلثات م ء ا و م ح ا و م ح اَ ان

م ا ء / م ا ح = م ء / م ح = م ا / م اَ = م ا ح / م اَ ح

* وبناء عليه يكون

* (٢ن × م ا ء) / (٢ن × م ا ح) = (٢ن × م ا ح) / (٢ن × م اَ ح) أو ا / إ = إ / اَ أو $\text{إ} = \sqrt{\text{ا اَ}}$

* ثانيا ـ يحدث أيضا ان

* م هـ ح / م هـ اَ = هـ ح / هـ اَ = م ح / م ا = م ء / م ح = م ا ء / م ا ح

* وبتغيير الوسطين يحدث

* م هـ ح / م ا ء = م هـ اَ / م ا ح = م اَ ح / (م ا ء + م ا ح)

* وحينئذ يكون أيضا

* (٤ن × م هـ ح) / (٢ن × م ا ء) = (٤ن × م اَ ح) / (٢ن × م ا ء + ٢ن × م ا ح) أو إَ / ا = ٢ اَ / (ا + إ)

* وبناء عليه يكون

* إَ = ٢ إ اَ / (ا + إ)

* تنبيه ـ اذا أخذ عكس مقادير الكميات ا و اَ و إ و إَ فانه يتوصل الى قوانين
* يقرب مقاديرها من المقادير السابق ايجادها (بنمرة ١٨٧)

* ١ / إَ = ½ (١ / إ + ١ / اَ) ، ١ / إ = $\sqrt{\text{١ / ا × ١ / اَ}}$

* نتيجة ـ هذه القوانين يتوصل منها الى ايجاد المقدار التقريبي للنسبة ط بطريقة جديدة
* فنفرض ان نق = ١ فيكون سطح الدائرة مساويا ط ولتعيينه يقال

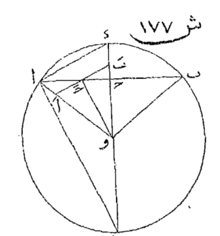
* نرسم مربعا داخل الدائرة فيكون سطحه ا = ٢ ثم نرسم مربعا آخر خارجها فيكون مسطحه
* آ = ٤ ويكون مقدار ط محصورا بين هذين المقدارين فاذا ضعفنا عدد الاضلاع فانا
* نتوصل بواسطة القوانين المتقدمة الى مقادير

* (ا و اَ) و (ا٢ و اَ٢) و (ا٣ و اَ٣) وهكذا الى (ان و اَن)

* ولايزال مقدار ط محصورا بين ان و اَن
* وحينئذ فتى اتحد مقدارا مسطحى هذين الشكلين فى بعض الارقام الاعشارية فانها تجعل
* لمقدار ط
* وبحساب عكس هذه السطوح المختلفة فان مقاديرها تقرب من $\frac{1}{ط}$ بواسطة توالى اجراء
* اعمال مشابهة للاعمال التى أجريت فى طريقة المحيطات

دعوى عمليـــــــــة

* (٢٠٠) اذا علم نصفا قطرى الدائرتين المرسومتين خارج وداخل شكل منتظم والمطلوب
* حساب نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين خارج
* وداخل شكل آخر منتظم مكافئ للاول ومضاعف له
* فى عدد الاضلاع (شكل ١٧٧) يقال



* ليكن ا ب ضلع المضلع المنتظم المعلوم فيكون
* و ا = و ب = س , و ح = س َ
* أوّلا — عد القطر د ح و هـ فتكون زاوية ا و د
* احدى زوايا المضلع المكافئ وليكن اَ ضلعه
* بحيث يكون

* و اَ = و حَ = س١ , و حَ = س َ١

* فمن حيث ان

* ٢ هـ د × و اَ = ٢ هـ د × و ا ح لزم أن يكون و اَ × و حَ = و ا × و ح
* لان نسبة المثلثين اللذين اشتركا فى زاوية هى كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية
* المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثانى ومن ذلك يستخرج أن

* $س_1^2 = س س َ$ أو $س_1 = \sqrt{س س َ}$

* ثانيا — اذا قارنا المثلثين ا ح د , و ح حَ المتشابهين ببعضهما يحدث

* $\frac{وح'}{وب}=\frac{اح}{اد}$ أو $\frac{س'_1}{س_1}=\frac{\sqrt{س^2-س'^2}}{\sqrt{2س(س-س')}}=\sqrt{\frac{س+س'}{2س}}$

* ومن ذلك يستنتج ان

* $س'_1=\sqrt{\frac{س'(س+س')}{2}}$

* نتيجة — يتيسر الحصول بواسطة هذين القانونين على المقدار التقريبي للكمية ط بطريقة
* جديدة فاذا فرض ان سطح الدائرة مساو للوحدة وجعل س رمزا لنصف قطرها حدث
* $س^2=\frac{1}{ط}$
* ولتعيين مقدار س يرسم مربع يكون مسطحه مساويا للوحدة أعني يكون ضلعه الوحدة
* أيضا فيحدث

* $س=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $س'=\frac{1}{2}$

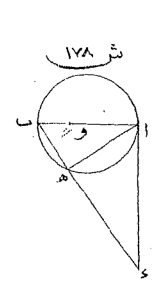
* وبتضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية بدون تغيير مقادير السطوح فانا نتوصل على التوالى
* الى مقادير الكميات الآتية

* $(س_1 ، س'_1)$ و $(س_2 ، س'_2)$ و $(س_3 ، س'_3)$ و ...... $(س_ن ، س'_ن)$

* ومن المعلوم ان الدائرة المتحدة فى المسطح مع تلك السطوح يكون نصف قطرها محصورا بين
* $س_ن$ و $س'_ن$ وبناء عليه يكون $\frac{1}{\sqrt{ط}}$ محصورا بين $س_ن$ و $س'_ن$ واذن يمكن الحصول
* على مقدار هذه الكمية مع درجة التقريب الكافية

---

* دعوى عمليـــــــة



* فى تربيع الدائرة (شكل ١٧٨)
* قد ذكرنا فيما تقدم انه لم يعلم الى الآن طريقة عمليـة حقيقية لتربيع
* الدائرة بواسطة المسطرة والبرجل أى ايجاد طول ضلع المربع المكافئ
* لها بطرق رسمية غير أنا نذكر هنا طريقتين تقريبيتين لذلك فنقول
* الاولى — (شكل ١٧٨) ليكن ا ب قطر الدائرة وليكن البعد
* و ح مساويا $\frac{1}{6}$ نصف قطر الدائرة فنمد من نقطة ا المماس ا د
* ثم نجعل نقطة ح مركزا وببعد مساو ضعف القطر ا ب نرسم

* قوسا من محيط دائرة يقطع المماس فى نقطة ء ثم نصل ب ء فيقطع محيط الدائرة فى نقطة هـ
* فاذا وصل ا هـ يكون هو المقدار التقريبي لضلع المربع المكافئ للدائرة وهذه الطريقة
* المنسوبة للعلم (سونيت) هى مفيدة فى الاعمال فبحساب مقدار ضلع المربع المكافئ للدائرة
* التى نصف قطرها الوحدة علم انه يساوى ١٫٧٧٢٤٥٣٨ ومقدار الضلع المذكور من طريقة
* (سونيت) هو ١٫٧٧٢٤٥٠٢

شكل ١٧٩

* الثانية - (شكل ١٧٩) يرسم قطران متعامدان
* داخل الدائرة ويقسم أحد أنصاف الاقطار و م مثلا
* الى أربعة أجزاء متساوية ثم نضم أحد هذه الاجزاء الى م
* نصف القطر و م بحيث يكون و ا $= \frac{٥}{٤}$ و م
ثم نتم رسم المربع الذى يكون فيه و ا نصف أحد قطريه
فيكون مكافئا لسطح الدائرة أما مقدار ضلع المربع
المتحصل من هذه الطريقة فهو ١٫٧٦٨٠٠٠٠ بدل المقدار ١٫٧٧٢٠٠٠٠ وهذا التقريب
كاف أحيانا فى الاعمال

الفصل الخامس

تمرينات

١ - المطلوب ايجاد مساحة المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٥ أمتار وكذا المرسوم خارجها

٢ - اذا فرض مربعان ضلع أحدهما يساوى قطر الآخر والمطلوب معرفة النسبة بينهما

٣ - المطلوب ايجاد مساحة المربع الذى علم أن الفرق بين قطره وضلعه ٦ أمتار

٤ - ما مقدار نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مربع يكون الفرق بين قطره وضلعه مساويا ٦ أمتار

٥ - اذا كانت مساحة المثلث المتساوى الاضلاع تساوى ٤٫٥٠ مترا مربعا والمطلوب ايجاد مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة المرسومة على المثلث

٦ - اذا كانت مساحة التاج المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز مساوية ٢٥٫١٣٢٨ مترا مربعا وكان نصف قطر محيط الدائرة الكبرى يزيد مترين عن نصف قطر محيط الدائرة الصغرى والمطلوب معرفة نصفى قطرى محيطى الدائرتين المذكورتين

٧ ـ اذا اتحد محيطا دائرتين فى المركز فانه يطلب البرهنة على أن وتر المحيط الاكبر المماس للمحيط الاصغر يكون قطر الدائرة مساحتها تساوى مساحة التاج

٨ ـ اذا كانت مساحة القطاع تساوى ٢٠,٢٦٥٠ مترا مربعا وكان مقدار درج قوسه المعتبر قاعدة له مساويا ٦٥° ١٥َ والمطلوب معرفة طول قوسه

٩ ـ المطلوب حساب مساحة القطعة التى مقدار درج قوسها ٤٥° من دائرة نصف قطرها ٣م

١٠ ـ اذا دل عدد ٣ أمتار على نصف قطر دائرة فما مقدار نصف قطر الدائرة التى مساحتها أربعة أمثال الاولى

١١ ـ المطلوب تعيين نصف قطر الدائرة المكافئة لعدة دوائر معلومة أو للفرق بين دائرتين معلومتين

١٢ ـ المطلوب تقسيم دائرة الى جزأين متكافئين أو عدة أجزاء متكافئة بواسطة دائرة أو دوائر أخرى متحدة مع الاولى فى المركز

١٣ ـ المطلوب تقسيم دائرة الى جملة أجزاء مناسبة لاعداد معلومة بواسطة دوائر أخرى متحدة معها فى المركز

١٤ ـ المطلوب معرفة عدد الترابيع الرخام التى شكلها مسدس منتظم طول ضلعه ٠,١٢ متر لفرشها فى محل مستطيل الشكل طوله ٥ أمتار وعرضه ٤ أمتار

١٥ ـ المطلوب ايجاد النسبة الكائنة بين المسدسين المنتظمين المرسوم أحدهما خارج الدائرة والثانى داخلها

١٦ ـ اذا علم ضلع المثلث المرسوم داخل الدائرة والمطلوب حساب سطح الدائرة المرسومة عليه

١٧ ـ المطلوب ايجاد النسبة بين سطح الدائرة والمثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها

١٨ ـ اذا كان مجموع مساحتى الدائرة والمثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخلها مساويا ٣ أمتار مربعة والمطلوب معرفة مساحة كل واحد منهما

١٩ ـ المطلوب ايجاد مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٣,٢٠ متر

٢٠ ـ اذا كانت مساحة المثمن المنتظم تساوى ٢٠ مترا مربعا والمطلوب تعيين نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه

(تم الجزء الثانى من كتاب التحفة البهية ويليه الجزء الثالث)

فهرســـــة الجـــــزء الثـانى من التحفة البهية

صحيفة

(تمت)

(بيان الخطأ والصواب الواقع فى الجزء الثانى من التحفة البهية)

صحيفة	سطر	خطأ	صواب
٥	١٤	بنمرة ٨	بنمرة ٨٠
٦	٢٠	مقدارهما	مقداراهما
٢١	٢٣	مٞ	* مٞ
٢١	٢٤	م ى	* م ى
٢٢	٧	عن عكس	على عكس
٢٣	٢٣	طساليس	طاليس


Bibliotheca Alexandrina
0556925